विश्वविद्यालय अनुदान आयोग
University Grants Commission
Quality higher education for all

டிஜிட்டல் எலக்ட்ரானிக்ஸ் ஓர் அறிமுகம்

டிஜிடல் எலக்ட்ரானிக்ஸ்
ஓர் அறிமுகம்

பொருளடக்கம்

பாடம் 1

எண்முறைகள்

இப்பாடத்தின் கற்றல் நோக்கங்கள்

- எண்முறைகள் பற்றிய அறிமுகம்
- பதின்மநிலை, இருநிலை, எண்ணிலை, பதினாறு நிலை எண்முறைகள்
- எண்நிலை முறை மாற்றம்

1.1 அறிமுகம்

கணினி இன்று மனித வாழ்க்கையின் ஒரு முக்கிய அங்கமாகத் திகழ்கிறது. கல்வி, தொழில்துறை, மருத்துவம், ஆராய்ச்சி, அரசாட்சி, சட்டம், சமூக சேவை, ஓவியம், இசை, திரைப்படம் எனப் பல்துறைகளிலும் கணினி ஒரு பெரும் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தி வருகிறது. நம் கற்பனையால் மட்டுமே கட்டுப்படுத்தப்படும் கணிப்பொறியின் பயன்பாடுகள் தான் எத்தனை! எத்தனை!

இந்த கணிப்பொறி ஒரு மின்னணு இயந்திரம். அதனால் தகவல் சேமிப்பு, கணிதச் செயல்பாடுகள் எனப் பலவற்றை துல்லியமாகவும் வேகமாகவும் அதனால் செய்யமுடியும். இக்கணிப்பொறி கையாளும் தரவுகளில் பல வகை உண்டு. எண்கள், ஒலி, ஒளி, உரை, படம் போன்றவை அவை. இந்தத் தரவுகள் எல்லாம் கணிப்பொறிக்குப் புரியும் வகையில் இருக்க வேண்டும். இவற்றை கணினி அலசவும், செயல்பாடுகளில் பயன்படுத்தவும் முடிய வேண்டும்.

தரவுகளை ஒப்புமை வகை (Analog), இலக்க வகை (Digital) எனப் பிரிக்கலாம். ஒப்புமை வகையில் மதிப்புகள் தொடர்ச்சியாக, இடைவெளி எதுவும் இல்லாமல் இருக்கும் ஒலி, வெப்பம் ஆகியவற்றின் அளவு இந்த வகையைச் சேர்ந்தது.

இலக்க வகையில், தரவுகளின் மதிப்பு தனித்தனியாக இருக்கும். இவற்றை இருநிலை எண்களின் வரிசைகளாகக் குறிப்பிடலாம். நம், கணிப்பொறிகள் இத்தகைய தரவுகளைக் கையாளுகின்றன.

பிட் (Bit) மற்றும் பைட் (Byte) எனும் சொற்கள் இலக்க வகையில் முக்கியமானவை. சுழி (0) அல்லது ஒன்று (1) என்பது ஒரு பிட் (Binary digit என்பதன் குறுக்கமே bit) எனப்படும். எட்டு பிட்கள் சேர்ந்த தொகுதி ஒரு பைட். மேலும் நான்கு பிட்கள் சேர்ந்த தொகுதி (Nibble) நிபிள் எனப்படும். கணிப்பொறியில் எல்லாமே பிட்கள் மற்றும் பைட்டுகளைக் கொண்டு தான் அளக்கப்படுகின்றன.

கணிப்பொறி எண்களை இருவகைகளில் கையாளுகிறது; முழு எண்கள் (Integer) மற்றும் பின்னங்கள் (Fraction). இதில் பின்னங்கள் மிதக்கும் புள்ளி முறையில் (Floating point representation) குறிக்கப்படுகின்றன. முழு எண்களைக் கையாள்வது எளிது. பின்னங்களைக் கையாளுவது சற்று கடினம். அதனால் இவ்விரு வகைகளுக்கும் தனித்தனி சுற்றுகள் தேவை.

இந்த எண்கள் எப்படி கையாளப்படுகின்றன என்பதை தெரிந்து கொள்ள எண் முறைகள் பற்றி அறிந்து கொள்வது அவசியம்.

1.2 எண் முறை என்றால் என்ன?

ஒரு எண்ணை எப்படி குறிப்பிடுகிறோம், அதன் மதிப்பை எப்படி கணக்கிடுகிறோம் என்பதைக் கூறும் அமைப்பு எண் முறை எனப்படும். இதில் பல முறைகள் உள்ளன.

- நாம் நீண்ட காலமாக அன்றாட வாழ்வில் பயன்படுத்தி வருவது பதின்மநிலை (தசம - Decimal) முறை. ஏனென்றால் இது பத்து என்ற எண்ணை அடிப்படையாகக் கொண்ட முறை.
- முதலில் பதின்மநிலை முறையை விரிவாகக் காண்போம். அதனை நன்கறிந்துகொண்டு, அதனைச் சார்ந்த இருநிலைமுறை (Binary),

எண்ணிலை (Octal) பதினாறு நிலை (Hexadecimal) முறைகளையும் அறிந்து கொள்வோம்.

- வெவ்வேறு எண் முறைகளின் அறிமுகம் நமக்குக் கிடைத்தவுடன், ஓர் எண் முறையில் உள்ள எண்ணை, மற்றொரு எண் அமைப்பில், அதற்குச் சமமான எண்ணாக மாற்றக் கற்றுக் கொள்வதும் தேவையாகிறது அல்லவா?

1.3 பதின்ம நிலை எண் முறை

நாம் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தும் எண்கள், பத்தின் அடிப்படையில் (radix) அமைந்தவை இது 0 முதல் 9 வரையில் உள்ள பத்து இலக்கங்களைக் கொண்டது. பத்து அல்லது அதற்கு மேலும் உள்ள மதிப்பானது, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இலக்கங்களால் குறிப்பிடப்படுகிறது. இதில் ஒரு இலக்கத்தின் மதிப்பு அது இருக்கும் இடத்தைப் பொருத்து மாறுபடுகிறது. இதனால் இது ‘இடம் சார்ந்த குறியீடு’ (Positional notation) எனப்படும். ஒரு இலக்கம் வலது பக்கத்திலிருந்து நான்காவது இடத்தில் இருந்தால், அந்த இலக்கத்தை பத்தின் நான்காவது மடிப்பால் (Power of 4) பெருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக 1947 என்ற பதின்ம நிலை எண்ணின் மதிப்பை எவ்வாறு கணக்கிட வேண்டும் என்று பார்ப்போமா? இங்கு அடிப்படை எண் கீழ்க்குறியீடாகக் காட்டப்படுகிறது.

$$1947_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

இவ்வாறு பதின்ம நிலை எண் அமைப்பில், எல்லா இலக்கங்களும் மேற்கூறியபடி $10^0, 10^1, 10^2$ . . . என்று பத்தின் மடிப்பில் எழுதப்படுகின்றன. பின்னங்களையும் இதுபோலவே குறிப்பிடலாம். இதில்* (*பதின்ம புள்ளிக்கு (decimal point)) வலது புறம் வரும் இலக்கங்களுக்கு மடிப்பின் மதிப்பு 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} என இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, 1947.23 என்பதன் மதிப்பை இவ்வாறு கணக்கிட வேண்டும். $1947.23 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$

பொதுவாக

$$X = \{\ldots X_2 X_1 X_0 . X_{-1} X_{-2} X_{-3} \ldots\}$$

என்னும் பதின்மநிலை எண்ணின் மதிப்பினை

$$X = \sum_i X_i 10^i \text{ (இங்கு } i = \ldots 2, 1, 0, -1, -2 \ldots)$$

என்று கணக்கிட வேண்டும்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இந்த விவரத்தை மேலும் தெளிவுபடுத்தும்.

(i) 25 $=20 + 5 = 2 \times 10 + 5 \times 1$
$= 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(ii) 485 $= 400 + 80 + 5$
$= 4 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$
$= 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(iii) 2022 $= 2000 + 0 + 20 + 2$
$= 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \times 1$
$= 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

(iv) 46.25 $= 40 + 6 + 0.2 + 0.05$
$= 4 \times 10 + 6 \times 1 + 2 \times 0.1 + 5 \times 0.01$
$= 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

1.4 இருநிலை எண் முறை

இருநிலை எண் முறையில் 0, 1 என இரண்டு இலக்கங்கள் மட்டுமே உள்ளன. இந்த முறைக்கு இரண்டு தான் அடிப்படை. இதில் இரண்டு என்ற எண்ணைக் கூட ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இலக்கங்களால் தான் குறிப்பிட வேண்டும். இந்த முறையில் ஒரு எண்ணின் மதிப்பு இடம் சார்ந்த குறியீட்டு முறைப்படிதான் கணக்கிடப்படுகிறது. பதின்மநிலை முறையில் பத்து

என்பதைப் பயன்படுத்தியது போல், இந்த முறையில் 2 பயனாகிறது. 0 அல்லது ஒன்றை பிட் எனக் குறிப்பிட்டோம் அல்லவா? இந்த இருநிலை முறையில், அனைத்து ‘பிட்’களும் 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 … என்று இரண்டின் மடிப்பில் எழுதப்படுகின்றன.

உதாரணமாக $(1\ 0\ 0\ 1\ 1)_2$ என்ற இருநிலை முறை எண் 19_{10} எனும் பதின்ம முறை எண்ணுக்குச் சமம்.

$$(1\,0\,0\,1\,1)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 16 + 0 + 0 + 2 + 1$$

$$= 19_{10}$$

இருநிலை முறையில் எழுதப்படும் பின்னங்களையும் பதின்ம நிலையில் குறிப்பிட்டது போலவே மதிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$(10.1\,0\,0\,1\,0)_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5}$$

$$= 2 + 0 + 0.5 + 0 + 0 + 0.0625 + 0$$

$$= 2.5625_{10}$$

1.5 இருநிலை – பதின்ம நிலை மாற்றம்

இருநிலை எண்ணை பதின்ம நிலைக்கு மாற்றுவது எளிது. ஏற்கனவே பார்த்தபடி ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் தேவையான இரண்டின் அடுக்கால் பெருக்கிச் சேர்க்க வேண்டும். இன்னும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் இதோ.

(i) $111_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 4 + 2 + 1$

$= 7$

எனவே $(111)_2 = (7)_{10}$

(ii) $(10\,111)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 16 + 0 + 4 + 2 + 1$

$= 23$

அதாவது $(10111)_2 = 23$

(ii) $(0.101)_2 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$

$= 1 \times 0.5 + 0 \times 1 + 1 \times 0.125$

$= 0.5 + 0 + 0.125$

எனவே $(0.101)_2 = (0.625)_{10}$

இப்போது $(1\,0\,1\,1\,1.\,101)_2$ வின் மதிப்பு பதின்ம நிலை முறையில் என்ன?

(ii) மற்றும் (iii) கணக்குகளிலிருந்து $(1\,0\,1\,1\,1.101)_2 = (23.625)_{10}$ என்று கண்டறிந்து விடலாம்.

பயிற்சி 1.1

$(101011.1011)_2$ வை அதன் சமமான பதின்ம நிலை எண்ணாக மாற்றவும்.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள எண் $(101011.1011)_2$

$101011 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 2 + 1$

$= 53$

- அதாவது $(101011)_2 = (53)_{10}$
- இருநிலை பின்னப் பகுதிக்கு

$1010 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4}$

$= 0.5 + 0 + 0.125 + 0$

$= 0.625$

- எனவே $(1010)_2 = (0.625)_{10}$
- அதனால் $(101011.1010)_2 = (53.625)_{10}$

என்று பதின்மநிலையில் மாறுகிறது.

பயிற்சி 1.2

110.101 என்ற இருநிலை எண்ணிற்குச் சமமான பதின்மநிலை எண்ணைக் கண்டறியவும்.

விடை :

தரப்பட்டுள்ள எண். 110.101

- முழு எண் பகுதியை முதலில் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$110 = 1 \text{ x } 2^2 + 1 \text{ x } 2^1 + 0 \text{ x } 2^0$$

$$= 4 + 2 + 0$$

$$(110)_2 = 6$$

- இப்பொழுது பின்னப் பகுதியைக் காண்போம்.

$$101 = 1 \text{ x } 2^{-1} + 0 \text{ x } 2^{-2} + 1 \text{ x } 2^{-3}$$

$$= 0.5 + 0 + 0.125$$

- இவ்வாறாக,

$$(101)_2 = (0.625)_{10}$$

எனவே,

$$(110.101)_2 = (6.625)_{10}$$

என்று பதின்ம நிலை எண்ணாக எழுதலாம்

1.6 பதின்மநிலையில் இருந்து இருநிலைக்கு மாற்றம்

ஒரு பதின்ம நிலை எண்ணை இரண்டால் வகுத்தால், மீதி 0 அல்லது 1 என வரும். வகுத்து வரும் ஈவுகளை திரும்பத் திரும்ப வகுத்தால், மீதிகள் வரிசையாக வரும். இந்த மீதிகளை வலமிருந்து இடமாக அடுக்கினால் தேவையான இருநிலை எண் கிடைக்கும்.

உதாரணமாக $(19)_{10}$ என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். தொடர்ந்து இரண்டால் வகுத்தால் முறைப்படி

$$\begin{array}{r|l l l}
2 & 19 & & \\
\hline
2 & 9 & -1 & \text{LSB} \\
\hline
2 & 4 & -1 & \\
\hline
2 & 2 & -0 & \\
\hline
2 & 1 & -0 & \\
\hline
 & 0 & -1 & \text{MSB}
\end{array}$$

எல் எஸ் பி (LSB = Least Significant Bit) என்பது சிறு மதிப்பு பிட் என்பதையும், எம் எஸ் பி (MSB = Most Significatn Bit) என்பது பெருமதிப்பு பிட் என்பதையும் குறிக்கும்.

கொடுத்த எண்ணை இருநிலை முறை எண்ணாக மாற்ற, இந்த மீதிகளை கீழிருந்து மேலாக எடுத்து, இடமிருந்து வலமாக எழுதவும்.

$$(19)_{10} = (10011)_2$$

இந்த இருநிலை எண்ணில் எத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும்? கொடுத்த எண்ணை விடக் கூடுதலாக இருக்கும்படி இரண்டின் சிறிய மடிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். அத்தனை இலக்கங்கள் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, 19 என்ற எண்ணில் 5 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

$$16 < 19 < 32$$
$$2^4 < 19 < 2^5$$

இந்த முறையில், ஒரு எண்ணை இருநிலை முறையில் எழுதாமலேயே, அதில் எத்தனை இலக்கங்கள் உள்ளன என்பதை கண்டறியலாம் எடுத்துக்காட்டாக 35 எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு,

$$32 < 35 < 64$$
$$2^5 < 35 < 2^6$$

ஆகவே, 35 இன் இருநிலை எண்ணில் 6 பிட்கள் இருக்கும் அந்த பிட்கள் என்ன என்பதைப் பார்ப்போமா?

$$\begin{array}{r|l c c l}
2 & 35 & & & \\
2 & 17 & - & 1 & \uparrow \text{ LSB} \\
2 & 8 & - & 1 & \\
2 & 4 & - & 0 & \\
2 & 2 & - & 0 & \\
2 & 1 & - & 0 & \\
 & 0 & - & 1 & \text{MSB}
\end{array}$$

ஆகவே $(35)_{10} = (100011)_2$

இப்போது பதின்மநிலை பின்னங்களை இருநிலைக்கு எப்படி மாற்றுவது எனக் காணலாம்.

1/2, 1/4, 1/8 போன்ற பின்னங்களை இருநிலை எண்களுக்கு துல்லியமாக மாற்றலாம். மடிப்புகளின் கூட்டல் முறையில் இதைச் செய்ய முடியும்.

$$0.5_{10} = 1 \text{ x } 2^{-1} = 0.1_2$$

$$0.25_{10} = 0 \text{ x } 2^{-1} + 1 \text{ x } 2^{-2} = 0.01_2$$

$$0.125_{10} = 0.12510 = 0 \text{ x } 2^{-1} + 0 \text{ x } 2^{-2} + 1 \text{ x } 2^{-3} = 0.001_2$$

இரண்டின் மடிப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக இல்லாத பின்னங்களை இருநிலை எண் முறையில் துல்லியமாகக் குறிப்பிட முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, 0.2_{10} இம்மாதிரியான எண்களை தேவையான அளவு துல்லியமாகக் குறிப்பிட முடியும். இதற்கு, தொடர்ந்து இரண்டினால் பெருக்கும் முறையைப் பயன்படுத்த கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

இம்முறையில் உள்ள படிநிலைகள் பின்வருமாறு

- பின்னப் பகுதியை இரண்டால் பெருக்கவும். விடையின் முழு எண் பகுதியைக் குறித்துக் கொள்ளவும். இது 0 அல்லது 1 என இருக்கும்.
- விடையின் முழு எண் பகுதியை விட்டு விடவும். பின்னப்பகுதியை மீண்டும் இரண்டால் பெருக்கவும்.

இந்தப் படியை பின்னப் பகுதி 0 என்று ஆகும் வரை செய்யவும். அல்லது வரும் பின்னப்பகுதி திரும்ப வரத் தொடங்கியதும் நிறுத்தவும்.

கிடைத்த முழு எண் பகுதிகளின் சரம் அந்த பின்னத்தைக் குறிக்கும் இருநிலை எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக 0.625 என்ற பதின்மநிலை எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம்.

		முழு எண் பகுதி
0.625 x 2 = 1.250	1	(MSB)
0.250 x 2 = 0.500	0	
0.500 x 2 = 1.000	1	(LSB)

முழு எண் பகுதிகளை சேர்த்தால்

$$(0.625)_{10} = (0.101)_2$$

முழு எண் பகுதிகளை மேலிருந்து கீழாக படித்து அவற்றை இடமிருந்து வலமாக பின்னப் புள்ளிக்கு வலது புறம் எழுதவும்.

மற்றொரு எடுத்துக்காட்டாக $(0.2)_{10}$ என்ற பதின்மநிலை எண்ணை எப்படி இருநிலையாக மாற்றுவது என்று காண்போம்.

		முழு எண் பகுதி
0.2 x 2 = 0.4	0	(MSB)
0.4 x 2 = 0.8	0	
0.8 x 2 = 1.6	1	
0.6 x 2 = 1.2	1	
0.2 x 0.4 = 0	0	(LSB)

(பின்னப் பகுதி திரும்ப வருகிறது)

எனவே $(0.2)_{10} = (0.00110011...)_2$

பயிற்சி 1.3

$(208.687)_{10}$ என்ற எண்ணை, அதன் சமமான இருநிலை எண்ணாக மாற்று.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள எண் $(208.687)_{10}$
- முழு எண் பகுதிக்கு, மீண்டும் மீண்டும் 2ஆல் வகுத்து, மீதிகளைச் சேகரிக்கவும்.

2	208	
2	104	- 0 ↑
2	52	- 0
2	26	- 0
2	13	- 0
2	6	- 1
2	3	- 0
	1	- 1

- எனவே $(208)_{10} = (11010000)_2$
- பின்னப் பகுதிக்கு இரண்டால், திரும்பத் திரும்ப பெருக்கி, விடையின் முழு எண் பகுதியைச் சேர்க்கலாமா?

0.687 x 2	=1.3750	1
0.3750 x 2	= 0.7500	0
0.7500 x 2	= 1.5000	1 ↓

- எனவே $(208.687)_{10} = (11010000.101)_2$.

பயிற்சி 1.4

$(63.4)_{10}$ இதை இருநிலை எண்ணாக மாற்று.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள எண் $(63.4)_{10}$
- முழு எண் பகுதியை இரண்டால் மீண்டும் மீண்டும் வகுத்து மீதிகளை சேகரிக்கவும்.

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & 63 & \\
2 & 31 & - \ 1 \\
2 & 15 & - \ 1 \\
2 & 7 & - \ 1 \\
2 & 3 & - \ 1 \\
 & 1 & - \ 1
\end{array}
$$

- எனவே, $(63.4)_{10} = (11111)_2$
- பின்னப் பகுதிக்கு இரண்டால் திரும்பத் திரும்ப பெருக்கி விடையின் முழு எண் பகுதியை சேர்த்து சேகரிக்கலாமா?

0.4 x 2	= 0.8	0
0.8 x 2	= 1.6	1
0.6 x 2	= 1.2	1
0.2 x 2	= 0.4	0
0.4 x 2	= 0.8	0

அதனால் $(0.4)_{10} = (0.0110...)_2$

எனவே, $(63.4)_{10} = (11111.0110...)_2$

1.7 பதினாறு நிலை எண் முறை

எண் முறைகளில் அடிப்படை எண் அதிகமாக இருந்தால் ஒரு எண்ணைக் குறிப்பிடத் தேவையான இலக்கங்கள் குறைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக 19 என்ற எண்ணை, பதின்ம நிலை முறையில் இரண்டு இலக்கங்களாலும் இருநிலை எண் முறையில் ஐந்து இலக்கங்களாலும்

குறிப்பிடுகிறோம். பதினாறின் அடிப்படையில் எண்களை எழுதும்போது இலக்க எண்ணிக்கை இன்னமும் குறையும்.

இருநிலை எண்களே கணிப்பொறியில் பயன்படுத்தப்பட்டாலும், 0 மற்றும் 1ல் மிகவும் நீண்ட எண் வரிசைகள் நினைவில் கொள்ளவும் பயன்பாட்டளவிலும் கடினமானவை. உதாரணமாக

$(255)_{10} = (1111\ \ 1111)_2$; 8 பிட்கள் வேண்டும்

$(1023)_{10} = (11\ 1111\ 1111)_2$; 10 பிட்கள் வேண்டும்

$(65,534)_{10} = (1111\ 1111\ 1111\ 1110)_2$; 16 பிட்கள் வேண்டும்.

மேற்கூறப்பட்ட நீண்ட வரிசை இருநிலை எண்களைப் பார்த்தீர்களா? இங்கு தான் பதினாறு நிலை எண்முறை மிகவும் உதவியாக இருக்கிறது.

ஏன் $2^4 = 16$ அதனால் தான். இது எப்படி எண் முறையை கணிப்பொறிக்கு எளிதாக்குகிறது எனக் காணலாம்.

பதினாறு நிலை எண்ணுக்கு 16 இலக்கங்கள் தேவை. நமக்குத் தெரிந்தது 0 முதல் 9 வரை பத்து இலக்கங்களே. மீதி ஆறு இலக்கங்களுக்கு என்ன செய்வது? A, B, C, D, E, F என்ற குறியீடுகளை 10, 11, 12, 13, 14, 15 என்ற மதிப்புகளைக் குறிப்பிடுவதாக கொள்ள வேண்டும்.

இந்த முறையில் B என்பது 12 என்ற பதின்மநிலை எண்ணைக் குறிக்கும். 10_{16} என்பது பதினாறைக் குறிக்கும்.

$2D_{16}$ என்பது 45_{10}ஐக் குறிக்கும். எப்படி?

$$\begin{aligned} 2D_{16} &= 2 \text{ x } 16^1 + D \text{ x } 16^o \\ &= 32 + 13 \\ &= 45_{10} \end{aligned}$$

நான்கு பிட்களால் பதினாறு சரங்களை உருவாக்க முடியும். இவை ஒவ்வொன்றையும் இருநிலை எண்களாகப் பார்த்தால், 0 முதல் F வரை பதினாறு எண்கள் கிடைக்கின்றன. அதனால் ஒவ்வொரு நாலு பிட் எண்ணும் ஒரு பதினாறு நிலை எண்ணுக்குச் சமம்.

1.8 பதினாறு நிலை - இருநிலை எண் முறை மாற்றம்

பின்வரும் அட்டவணை 1.1 0 முதல் 15 வரையிலான பதின்ம நிலை எண்களுக்குச் சமமான இருநிலை மற்றும் பதினாறு நிலை எண்களை வழங்குகிறது.

பதின்மநிலை	பதினாறு நிலை	இருநிலை
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

அட்டவணை 1.1

இந்த அட்டவணை துணை கொண்டு, ஒரு இருநிலை முறை எண்ணை, மிக எளிதாக, பதினாறு நிலை எண்ணாக மாற்றலாம். இதற்குச் செய்ய வேண்டியது இவ்வளவே. வலது பக்கத்திலிருந்து துவங்கி நான்கு நான்கு பிட்களாகச் சேர்த்து வைக்கவும். இடது பக்கம் நான்கிற்கும் குறைவான இலக்கங்கள் இருந்தால் தேவையான சுழிகளை முன்னொட்டாக சேர்த்துக் கொள்ளலாம். இனி ஒவ்வொரு நான்கு பிட்த் தொகுதியையும் ஒரு பதினாறு நிலை எண்ணாக மாற்றி எழுத வேண்டும். அவ்வளவுதான் எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{1100}{C}\quad\frac{1001}{9}\quad\frac{1101}{D}$$

$$= C9D_{16}$$

பதினாறு நிலை எண்ணில் விளக்கங்கள் குறைவாக இருப்பதும், ஒரு பைட்டை சரியாக இரண்டு இலக்கங்களாக குறிப்பதும் இம்முறையின் சிறப்புத் தன்மைகள். எளிதாக இருநிலை முறைக்குச் சென்று திரும்புவது கணிப்புகளை விரிவாக்கும்.

பயிற்சி 1.5

பின்வரும் பதினாறு நிலை எண்களை இருநிலை எண்களாக மாற்றவும்.

(i) $(36)_{16}$
(ii) $(8A.9)_{16}$

விடை

- 36 என்ற எண்ணில் 3, 6 என்று இரண்டு இலக்கங்கள் உள்ளன. அட்டவணை 1.1ஐப் பயன்படுத்தி அவற்றிற்குச் சமமான இருநிலை எண்களைக் கண்டறிவோம்.
- அதாவது $(36)_{16} = (0011\ 0110)_2$
- $(8A.9)_{16}$ என்னும் கணக்கில் முந்தையது போலவே முழு எண் பகுதிக்கு அட்டவணை 1.1ஐப் பயன்படுத்தலாம்.

  எனவே $(8A)_{16} = (1000\ 1010)_2$

- பின்னப் பகுதியான $(.9)_{16}$க்கு, அதற்குச் சமமான இருநிலை எண்ணை நான்கு பிட்களில் எழுத வேண்டும்.

  எனவே $(.9)_{16} = (.1001)_2$

- இப்பொழுது முழு எண்ணையும் பின்னப்பகுதியையும் இணைத்து எழுதினால்

$$(8A.9)_{16} = (1000\ 1010\ .\ 1001)_2$$

1.9 இருநிலை - பதினாறு நிலை மாற்றம்

இருநிலை எண்ணை பதினாறு நிலை எண்ணாக மாற்றும் வழிமுறையை இங்கு பார்க்கலாம்.

- முன்பே பார்த்தது போல் இருநிலை எண்களை வலது பக்கத்திலிருந்து (LSB) துவங்கி நான்கு நான்கு பிட்களாக சேர்த்துக் கொள்ளவும்.
- பின்ன பகுதியில், புள்ளியின் இடமிருந்து தொடங்கி பிட்களை நான்கு நான்காக சேர்க்க வேண்டும்.
- ஒவ்வொரு நான்கு பிட் எண்ணையும் ஒரு பதினாறு நிலை எண்ணாக எழுத வேண்டும்.
- இந்த எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இதனைப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

$(101011.1101)_2$ என்ற இருநிலை எண்ணை பதினாறு நிலைக்கு மாற்றுவது எப்படி?

விடை

$$\frac{0010}{2}\ \frac{1011}{B}\ .\ \frac{1101}{D}$$

எனவே $(101011.1101)_2 = 2BD_{16}$

- மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில், நான்கு இலக்க எண்ணாக, கொடுக்கப்பட்ட இருநிலை எண் எழுதப்பட்டுள்ளதைக் கவனித்தீர்களா?
- பதின்மப் புள்ளியின் இடது பக்கம், நான்குக்கும் குறைவான இலக்கங்கள் இருந்தால் தேவையான சுழிகளை முன்னொட்டாகச் சேர்த்துக் கொள்ளலாம் என்று ஏற்கனவே பார்த்தோம் அல்லவா? அதைத்தான் செய்திருக்கிறோம்.
- பின்னப்பகுதியில் நான்கு இலக்கங்களுக்கு குறைவாக இருப்பின் சுழிகளை வலப்பக்கம் சேர்க்க வேண்டும்.

பயிற்சி 1.6

பின்வரும் இருநிலை எண்களை, பதினாறு நிலை எண்களாக மாற்றவும்.

(i) $(10101111)_2$

(ii) $(11011.111)_2$

(iii) $(101011011101.1100111)_2$

விடை

(i) தரப்பட்டுள்ள இருநிலை எண் $(10101111)_2$

$$= \frac{1010}{A} \quad \frac{1111}{F}$$

$$= (AF)_{16}$$

(ii) தரப்பட்டுள்ள இருநிலை எண் $(11011.111)_2$

$$= \frac{0001}{1} \quad \frac{1011}{B} \; . \; \frac{1110}{E}$$

$$= (1B.E)_{16}$$

(iii) தரப்பட்டுள்ள இருநிலை எண் $(101011011101.1100111)_2$

$$= \frac{1010}{A} \quad \frac{1101}{D} \quad \frac{1101}{D} \; . \; \frac{1100}{C} \quad \frac{1110}{E}$$

$$= (ADD.CE)_{16}$$

1.10 பதின்மநிலை - பதினாறு நிலை மாற்றம்

ஒரு எண்ணை பதின்ம நிலையில் இருந்து பதினாறு நிலைக்கு மாற்றுவது, இருநிலை மாற்றம் போலவே தான். திரும்பத் திரும்ப கொடுத்த பதின்ம நிலை எண்ணை பதினாறால் வகுத்தல் முறையைத்தான் பின்பற்ற வேண்டும். இந்த முறையில் உள்ள பல நிலைகள் கீழ் வருமாறு :

- கொடுத்த பதின்ம நிலை எண்ணை 16ஆல் வகுத்து, மீதியைக் கணக்கிடவும்.
- 0 முதல் 15 வரை உள்ள இந்த மீதியை, ஒரு பதினாறு நிலை இலக்கமாக குறிப்பிடவும்.
- ஈவு சுழியாகும் வரை ஈவை இவ்வாறு வகுத்து மீதியிலிருந்து பதினாறு நிலை இலக்கங்களைப் பெறவும்.
- எடுத்துக்காட்டு 1

  934.5 என்ற பதின்ம நிலை எண்ணைப் பதினாறு நிலைக்கு மாற்றுவோமா?

  பதினாறு நிலை இலக்கம்

16	934		
16	58	-	6 ↑
	3	-	A

  எனவே, $(934)_{10} = (3A6)_{16}$

- பதின்ம நிலை எண்ணின் பின்னப்பகுதியை, பதினாறு நிலை பின்னமாக மாற்றுவதற்கு 16ஆல் திரும்பத் திரும்ப பெருக்கி முழு எண் பகுதிகளைச் சேகரிக்க வேண்டும்.
- உதாரணமாக $(0.5)_{10}$ என்பதை பதினாறு நிலை பின்னமாக இவ்வாறு மாற்ற வேண்டும்.

	முழு எண் பகுதி
0.5 x 16 = 8.0	8
0.6 x 16 = 0	0

எனவே, $(934.5)_{10} = 3A6.80$

பயிற்சி 1.7

2023.625 எனும் எண்ணை, அதற்குச் சமமான பதினாறு நிலை எண்ணாக மாற்றவும்.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள எண் : 2023.625

$$\begin{array}{r|l l}
16 & 2023 & \\
16 & 126 & -\ 7 \\
 & 7 & -\ E(=14)
\end{array}$$

- எனவே $(2023)_{10} = (7E7)_{16}$
- $0.625 \times 16 = 10.000 = A$
- எனவே $(2023.625) = (7E7.A)_{16}$

1.11 பதினாறு நிலை - பதின்ம நிலை மாற்றம்

- ஒரு பதினாறு நிலை எண்ணை, பதின்மநிலை எண்ணாக மாற்றுவது, இருநிலை - பதின்ம நிலை மாற்றம் போன்றதே.
- ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் தேவையான 16இன் அடுக்கால் பெருக்கி சேர்க்க வேண்டும்
- முழு எண் பகுதியை வலப்பக்கம் கடைசியிலிருந்து இடமாக, முறையே $16^0, 16^1, 16^2, 16^3...$ ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் பெருக்க வேண்டும்.
- பின்னப் பகுதியை $16^{-1}, 16^{-2}$ வால் பெருக்க வேண்டும்.
- ஒரு எடுத்துக்காட்டை பார்ப்போம்

$(D3)_{16}$ ஐ, பதின்ம நிலை எண்ணாக மாற்றலாமா?

$(D3)_{16} \quad = D \times 16^1 + 3 \times 16^0$

$= 13 \text{ x } 16^1 + 3 \text{ x } 16^0$
$= 13 \text{ x } 16 + 3 \text{ x } 1$
$= 208 + 3$

எனவே $(D3)_{16} = (211)_{10}$

$(D3)_{16}$ என்பதை $(D3)_H$ என்றும் எழுதலாம் (H என்பது பதினாறுநிலை எண் முறையை குறிக்கும்.)

பயிற்சி 1.8

பின்வரும் பதினாறுநிலை எண்களை பதின்மநிலை எண்ணாக மாற்றவும்.

(i) $(C9)_{16}$
(ii) $(2BC.8)_{16}$

விடை

(i) $(C9)_{16}$ $= C \text{ x } 16^1 + 9 \text{ x } 16^0$

$= 12 \text{ x } 16 + 9 \text{ x } 1$
$= 192 + 9$
$= 201$

எனவே $(C9)_{16} = (201)_{10}$

(ii) $(2BC.8)_{16}$ $= 2 \text{ x } 16^2 \text{ x } B \text{ x } 16^1 + C \text{ x } 16^0 + 8 \text{ x } 16^{-1}$

$= 2 \text{ x } 256 \text{ x } 11 \text{ x } 16 + 12 \text{ x } 1 + 8 \text{ x } \frac{1}{16}$
$= 512 + 176 + 12 + 0.5$
$= 700.5$

எனவே $(2BC.8)_{16} = (700.5)_{10}$

1.12 எண்ணிலை முறை

எண்ணிலை முறைக்கு அடிப்படை 8. இம்முறையில் 0 முதல் 7 வரை உள்ள எட்டு இலக்கங்கள் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படும்.

இருநிலை எண்முறையின் அடிப்படை 2 அல்லவா? $2^3=8$ என்பதால், 0 முதல் 7 வரை உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணிலை இலக்கத்தையும் மூன்று பிட்களால் எழுத முடியும். அதை பின்வரும் அட்டவணை 1.2வில் காணலாம்.

இந்த அட்டவணை எண்ணிலை - இருநிலை மாற்றத்திற்கு உதவியாக இருக்கும்.

பதின்மநிலை	எண்ணிலை	இருநிலை $2^2+2^1+2^0$
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

அட்டவணை 1.2

1.13 எண்ணிலை பதின்மநிலை மாற்றம்

ஒரு எண்ணிலை எண்ணை பதின்மநிலை எண்ணாக மாற்ற, ஒவ்வொரு இலக்கத்தையும் அந்த இடத்திற்கு ஏற்ற எட்டின் மடிப்பால் பெருக்கி, விடைகளைக் கூட்ட வேண்டும். முழு எண் பகுதிக்கு எட்டின் முறையே மடிப்புகள் $8^0, 8^1, 8^2$ . . . என்றும் பின்னப் பகுதிக்கு $8^{-1}, 8^{-2}, 8^{-3}$ . . . என்றும் கொள்ள வேண்டும். இங்கும் எண்ணிலைப் புள்ளி முழு எண்ணையும் பின்னப் பகுதியையும் பிரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக 143_8 என்ற எண்ணின் பதின்ம முறை மதிப்பைக் காண்போமா?

$$
\begin{aligned}
143_8 &= 1 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0 \\
&= 64 + 32 + 3 \\
&= 99_{10}
\end{aligned}
$$

1.14 பதின்மநிலை - எண்ணிலைக்கு மாற்றம்

ஒரு பதின்ம நிலை எண்ணை, திரும்பத் திரும்ப எட்டால் வகுத்து எண்ணிலை முறைக்கு மாற்றலாம். அதற்கான படிநிலைகள் பின்வருமாறு

- பதின்ம எண்ணை எட்டாம் வகுப்பு, மீதியைக் குறித்துக் கொள்ளவும். மீதி ஒரு எண்ணிலை எண்ணாக (0 முதல் 7 வரை) இருக்கும்.
- ஈவு சுழியாக ஆகும்வரை திரும்பத் திரும்ப ஈவினை எட்டால் வகுக்கவும்.
- எடுத்துக்காட்டாக $(108)_{10}$ என்பதன் என்னிலே வடிவம் என்ன?

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 108 \\ \hline
8 & 13 \quad - \; 4 \quad \text{LSB} \\ \hline
8 & 1 \quad\; - \; 5 \\ \hline
8 & 0 \quad\; - \; 1 \quad \text{MSB}
\end{array}
$$

- பின்னப் பகுதியை, எண்ணிலையில் மாற்றுவதற்கு 8 ஆல் திரும்பத் திரும்ப பெருக்கி, முழு எண்பகுதிகளைச் சேகரிக்க வேண்டும். பின்னப் பகுதி சுழியாகும் வரை இதை செய்ய வேண்டும்.
- உதாரணமாக $(0.5)_{10}$ என்ற எண்ணை எண்ணிலை பின்னமாக மாற்றுவோமா?

முழு எண் பகுதி

$0.5 \times 8 = 4.0$ 4

$0.0 \times 8 = 0$

எனவே $(0.5)_{10} = (0.4)_8$

பயிற்சி 1.9

பின்வரும் எண்ணிலை எண்களை பதின்ம நிலை எண்களாக மாற்றவும்.

(i) $(63)_8$
(ii) $(0.5)_8$

விடை

(i) $(63)_8 = 6 \times 8^1 + 3 \times 8^0$
$= 6 \times 8 + 3 \times 1$
$= 48 + 3$
$= 51$

ஆகவே $(63)_8 = (51)_{10}$

(ii) $(0.5)_8 = 5 \times \frac{1}{8}$

$= 0.625$

எனவே $(0.5)_8 = (0.625)_{10}$

1.15 எண்ணிலையிலிருந்து இருநிலைக்கு மாற்றம்

ஒரு பதின்மநிலை எண்ணை இருநிலை எண்ணாக மாற்ற தொடர்ந்து இரண்டினால் வகுத்தோம் அல்லவா? எண்ணிலை எண்ணின் அடிப்படை 8. இதை 2^3 என்றும் எழுதலாம்.

- எண்ணிலை எண்ணை இருநிலைக்கு மாற்ற ஒவ்வொரு எண்ணிலை இலக்கத்தையும் மூன்று பிட்களாக எழுதினால் போதும்.
- அட்டவணை 1.2 இதற்கு உதவும்.

- சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போமா?

எண்ணிலை	இருநிலை
23	010 011
261	010 110 001
71.5	111 001 .101

1.16 இருநிலையிலிருந்து எண்ணிலைக்கு மாற்றம்

- ஒரு இருநிலை முறை எண்ணை, மிக எளிதாக எண்ணிலை எண்ணாக மாற்றலாம்.
- கொடுத்த இருநிலை எண்ணை வலது பக்கத்திலிருந்து துவங்கி மூன்று மூன்று பிட்களாக சேர்த்து வைக்கவும்.
- MSBயில், மூன்றிற்கும் குறைவான இலக்கங்கள் இருந்தால் தேவையான சுழிகளை முன்னொட்டாக சேர்த்துக் கொள்ளலாம்.
- அடுத்து, ஒவ்வொரு மூன்று பிட் தொகுதியையும் ஒரு எண்ணிலை இலக்கமாக மாற்றி எழுத வேண்டும்.
- எடுத்துக்காட்டாக $(110111)_2$ என்ற இருநிலை எண்ணை எண்ணிலையாக எழுதுவோமா?

$$\frac{110}{6}\ \frac{111}{7}$$

- எனவே $(110\ 111)_2 = (67)_8$ ஆகும்.
- பின்னப் பகுதியில் மூன்று இலக்கங்களுக்குக் குறைவாக இருந்தால், சுழிகளை வலப்பக்கம் பின்னெட்டாக வேண்டும்.
- இந்த எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

$$(10101.11)_2 = \frac{010}{2}\frac{101}{5}.\frac{110}{6}$$

- ஆகவே இதன் விடை $(25.6)_8$.

வினாக்கள்

குறுவினாக்கள்

1. $(12)_{10} = (?)_2$
2. $(2003)_{10} = (?)_8$
3. $(A)_H = (?)_{10}$
4. $(BAD)_H = (?)_2$
5. $(0.5)_{10} = (?)_2$

சிறுவினாக்கள்

1. $(128)_{10} = (X)_8 = (Y)_{16} = (Z)_2$ இதில் X, Y, Z கண்டுபிடிக்கவும் .

2. $(2^{11}-1)$, இதனை பதின்ம நிலை, இருநிலை, பதினாறு நிலை மற்றும் எண்ணிலை முறைகளில் எழுது.

3. பின்வரும் பதின்ம நிலை எண்களை இருநிலை எண்களாக மாற்றுக.
   (i) $(67)_{10}$
   (ii) $(125)_{10}$
   (iii) $(18.61)_{10}$
   (iv) $(1025)_{10}$
   (v) $(48.125)_{10}$
   (vi) $(101.11)_{10}$

4. கீழ்காணும் இருநிலை எண்களை பதின்ம நிலை எண்களாக மாற்றவும்.
   (i) $(111011)_2$
   (ii) $(10110101)_2$
   (iii) $(11111101)_2$
   (iv) $(111.00)_2$
   (v) $(1101.10)_2$
   (vi) $(111101.11001)_2$

5. பின்வரும் பதினாறு நிலை எண்களை அவற்றிற்குச் சமமான பதின்ம நிலை எண்களாக மாற்றவும்.
   - (i) $(2C9)_{16}$
   - (ii) $(ADD)_{16}$
   - (iii) $(DAD)_{16}$
   - (iv) $(36.5)_{16}$
   - (v) $(8B.B)_{16}$
   - (vi) $(86.4F)_{16}$

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பதின்ம நிலை எண்களை அவற்றிற்கு சமமான பதினாறு நிலை எண்களாக மாற்றுக.
   - (i) $(423)_{10}$
   - (ii) $(189)_{10}$
   - (iii) $(1024)_{10}$
   - (iv) $(39.8)_{10}$
   - (v) $(47.65)_{10}$
   - (vi) $(98.625)_{10}$

7. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பதினாறு நிலை எண்களை இருநிலை எண்களாக மாற்றவும்.
   - (i) $(A10)_{16}$
   - (ii) $(DEF)_{16}$
   - (iii) $(FACE)_{16}$
   - (iv) $(78.B)_{16}$
   - (v) $(BED.E6)_{16}$

8. பின்வரும் இருநிலை எண்களை பதினாறு நிலை எண்களாக மாற்றுக.
   - (i) $(101\ 011\ 1010)_2$
   - (ii) $(110.1)_2$
   - (iii) $(1100111101001)_2$
   - (iv) $(11010.01)_2$
   - (v) $(1000011.101101)_2$
   - (vi) $(1000.0001)_2$

9. கீழ்காணும் எண்ணிலை எண்களை பதின்ம நிலை எண்களாக மாற்றுக.

(i) $(22)_8$
(ii) $(125)_8$
(iii) $(785.5)_8$
(iv) $(130.6)_8$

10. பின்வரும் பதின்ம நிலை எண்களை அவற்றிற்கு சமமான எண்ணிலை எண்களாக மாற்றவும்.

(i) $(99)_{10}$
(ii) $(183.82)_{10}$
(iii) $(984.25)_{10}$
(iv) $(25.25)_{10}$
(v) $(59.326)_{10}$

11. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணிலை முறை எண்களை இருநிலை எண்களாக மாற்றவும்.

(i) $(34)_8$
(ii) $(125)_8$
(iii) $(648)_8$
(iv) $(12.62)_8$

12. பின்வரும் இருநிலை எண்களை சமமான எண்ணிலை எண்களாக மாற்றவும்.

(i) $(101000)_2$
(ii) $(1010.01)_2$
(iii) $(1111001101)_2$
(iv) $(110.1)_2$
(v) $(11010.1011110)_2$

பாடம் 2

இருநிலை எண் கணிதம்

இப்பாடத்தின் கற்றல் நோக்கங்கள்

- இருநிலை கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் - எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- நிரப்பு முறை பயன்படுத்திக் கழித்தல்
- குறியுரு எண்கள் பற்றிய அறிமுகம்.

2.1 அறிமுகம்

பதின்ம நிலை எண் முறையில் கூட்டல், கழித்தல் போன்ற கணித அடிப்படைகள் நாம் அனைவரும் அறிந்ததே. இலக்க வகையில் கணிப்பொறி செயல்படுகிறது; இது எண்களை இருநிலை முறையில் கையாளுகிறது. இருநிலை எண் கணித அடிப்படைகளை அறிந்து கொள்ளுதல் அவசியமான ஒன்றாகிறது. இதன் துணை கொண்டு, கூட்டி, கழிப்பான் போன்ற எண்கணித இலக்க முறை டிஜிடல் சுற்றுகளைப் புரிந்து கொள்ள முடியும். மேலும் குறியுரு இருநிலை எண்களைப் பற்றிய புரிதலும் நமக்குத் தேவை. மேற்கூறியவற்றினை அறிந்து கொள்ளத் தேவையான எண்கணித அடிப்படைகளை இந்தப் பாடத்தில் காண்போம்.

2.2 இருநிலை கூட்டல்

இரண்டு ஓரிலக்கங்களைக் கூட்டினால் வரும் விடையை, சில சமயங்களில் ஒரு இலக்கத்தால் குறிப்பிட முடியாது, இரண்டு இலக்கங்கள் தேவைப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, 8 + 7 = 15.

- இருநிலை எண்ணில் கூட்டல் (Sum) என்பதும், செல்எண் (Carry) என்பதும், 0 அல்லது 1 என்றுதான் இருக்கும்.

- கூட்டல் விதிகள்

  0 + 0 = 0 0

  0 + 1 = 0 1

  1 + 0 = 0 1

  1 + 1 = 1 0

1 + 1 = 2 என்பது நமக்குத் தெரியும். இங்கே இருநிலையில் $2 = (10)_2$.

பயிற்சி 2.1

$(2)_{10} + (4)_{10}$ என்பதன் இருநிலை கூட்டல் விடை காண்க.

விடை

			இருநிலை
2_{10}	=		010
4_{10}	=	+	100
கூட்டல் விடை	=		110

இது 6_{10} என்பதற்குச் சமம்

விடை : 110_2

பயிற்சி 2.2

$11_{10} + 8_{10}$ என்பதை இருநிலை எண்களாக மாற்றி விடை தருக. இதன் பதின்ம நிலை கூட்டலோடு ஒப்பிடு.

விடை

			இருநிலை
11	=		1011
8	=	+	1000
கூட்டல் விடை	=		10011

விடை : 10011_2 என்பது இதன் கூட்டல் மதிப்பு. இது 19 எனும் பதின்ம எண்ணுக்குச் சமம்.

2.2.1 மேலும் சில கூட்டல் முறைகள்

சென்ற பாடத்தில் நாம் படித்த எண் முறை மாற்றங்கள் உங்களுக்கு நினைவிருக்கும். பதின்மநிலை எண்ணை பதினாறு நிலை எண்ணாக மாற்றி, பிறகு ஒவ்வொரு பதினாறு நிலை இலக்கத்தை நான்கு பிட் இருநிலை எண்ணாக எளிதில் எழுதலாம்.

- சற்றே பெரிதான பதின்ம எண்களை பதினாறு நிலை எண்களாக எழுதி, அவற்றை இருநிலையாக மாற்றுவது எளிது. இந்த வழியிலும் கூட்டலாம்.
- எடுத்துக்காட்டாக 131 எனும் எண்ணை 74 என்பதோடு கூட்ட, இந்த முறையை மேற்கொள்ளலாம்.

$$
\begin{array}{llll}
(131)_{10} & = (83)_{16} & = 1000 & 0011 \\
 & & + & \\
(74)_{10} & = (4A)_{10} & = 0100 & 1010 \\
\hline
 & & 1100 & 1101
\end{array}
$$

இதன் விடை $(11001101)_2$ என எளிதில் பெறலாம்.

பயிற்சி 2.4

5.125 + 7.75, என்பதன் மதிப்பை கணக்கிடுக.

விடை

$(5.125)_{10} = (101.001)_2$

$(7.75)_{10} = (111.110)_2$

பதின்ம நிலை	இருநிலை
	111
5.125	101 . 001
+ 7.75	+ 111 . 110
12.875	1100 . 111

2.2.2 இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட எண்களைக் கூட்டுதல்

- மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் இரண்டு எண்களைக் கூட்டுவதை பார்த்தோம்.

- இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட எண்களைக் கூட்டுவதற்கு, முதல் இரண்டு எண்கள் கூட்டியதன் விடையுடன் மூன்றாவது எண்ணைக் கூட்டுவது, அதில் கிடைத்த விடையுடன் அடுத்த எண்ணைக் கூட்டுவது என கணக்கிட்டுச் செல்ல வேண்டியது தான்!

- எடுத்துக்காட்டாக

  $15_{10} + 15_{10} + 15_{10}$

  இருநிலை எண் முறையில்

  $(1111)_2 + (1111)_2 + (1111)_2$

  முதலில் இரண்டு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$
\begin{array}{r}
1111 \\
+1111 \\
\hline
11110 \\
\hline
\end{array}
$$

- இதனுடன் மூன்றாவது எண்ணைக் கூட்ட வேண்டும்.

$$
\begin{array}{r}
11110 \\
+\ \ 1111 \\
\hline
101101 \\
\hline
\end{array}
$$

- இவ்வாறு கூட்டல், இலக்கவகை கணித செயல்பாடுகளில் முக்கியமான ஒன்று.

- நவீன கணினிகளில் கூட்டல் மூலமாகத்தான் கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்றவை செய்யப்படுகின்றன.

2.3 இருநிலை கழித்தல்

கழிக்கும் செயல்பாட்டிற்கு இரண்டு எண்கள் தேவை. எந்த எண்ணில் இருந்து கழிக்கிறோமோ அது கழிபடும் எண் (Minuend) எனப்படும். எந்த எண்ணைக் கழிக்கிறோமோ அது கழிக்கும் எண் (Subtrahend) எனப்படும்.

- இருநிலை முறை எண்களின் கழித்தல் விதிகள் இதோ

0	-	0	= 0
1	-	0	= 1
1	-	1	= 0
10	-	1	= 1

- சுழியிலிருந்து 1ஐக் கழிக்க இயலாது. அதனால், அதற்கு முந்தைய மிகு மதிப்பு பிட்டிலிருந்து (MSB) கடன் வாங்க வேண்டும்.
- பிறகு முந்தைய மதிப்பு பிட்டின் மதிப்பை 0 என மாற்ற வேண்டும்.
- ஒருவேளை, முந்தைய பிட் 0வாக இருந்தால், அதற்கும் முந்தைய எந்த மிகு மதிப்பு பிட் 1 என மதிப்பு பெற்றுள்ளதோ அதனை கடனாகப் பெற வேண்டும். அதனை 0வாக மாற்ற வேண்டும்.
- மேலும் கடன் தந்த பிட்டின் வலப்பக்கம் உள்ள அனைத்து 0 பிட்களையும் 1 என மாற்ற வேண்டும்.
- நாம் பதின்ம முறையை கழித்தலில் செய்வதுபோல இங்கும் செய்ய வேண்டும்.
- எடுத்துக்காட்டு

0	1		1	10		← கடன்
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	1	1	
	-		1	1	0	
0	1	1	1	0	1	

இவ்வாறு 1 என உள்ள மிக மதிப்பு பிட் கடன் தந்துள்ளது.

பயிற்சி 2.5

$(1000)_2 - (101)_2$ என்பதன் விடை என்ன?

விடை

$$\begin{array}{cccc} 0 & 10 & & \leftarrow \text{கடன்} \\ \cancel{1} & 0 & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

இங்கே முன் பிட்டிலிருந்து கடன் வாங்கப்பட்டுள்ளது. இதன் கழித்தல் விடை $(100)_2$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.6

இருநிலை கழித்தல் விதிகளை பயன்படுத்தி $(5)_{10}$ - $(2)_{10}$ என்பதன் விடையைக் கண்டுபிடி.

விடை

$5_{10} = (101)$

$2_{10} = (010)_2$

எனவே,

$$\begin{array}{rccc} & 0 & 10 & \leftarrow \text{கடன்} \\ & \cancel{1} & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

விடை

$(11)_2 = (3)_{10}$ என்பது நமக்குத் தெரியும் என்பதால், சரியான விடை கிடைத்துள்ளது.

2.4 இருநிலை எண்களின் பெருக்கல்

பதின்ம எண்களை பெருக்குவது போலவே இந்தக் கணக்கீட்டையும் செய்ய முடியும்.

- பெருக்கல் விதிகள்

$0 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 0 = 0$
$1 \times 1 = 1$

எடுத்துக்காட்டு

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & + & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

இதை மீண்டும் பதின்ம எண்ணாக மாற்ற பதினாறு நிலை எண் வழியே முயலாம்.

$(10001111)_2 = (8F)_{16} = (143)_{10}$

- இவ்வாறு நாம் விடையை சரிபார்க்கலாம்.

நினைவில் கொள்க :

பகுதி பெருக்கல் பலன்களை கூட்டும் போது, இருநிலை கூட்டல் விதிகளை பயன்படுத்த வேண்டும். நெடுவரிக் கூட்டல் மதிப்பின் செல்எண் பிட்களை நினைவாக முந்தைய மிகு மதிப்பு பிட்டுடன் கூட்ட வேண்டும்.

2.5 இருநிலை வகுத்தல் முறை

பதின்ம எண்முறை பெருக்கலை ஒத்து இருநிலை பெருக்கல் இருப்பதை ஏற்கனவே பார்த்தோம். அதுபோலவே, வகுத்தல் முறையும் பதின்ம எண்களை வகுப்பது போலவே அமைகிறது.

- இதன் விதிகள்

$$0 \div 1 = 0$$

$$1 \div 1 = 1$$

- 0 வால் எதையும் வகுக்கக் கூடாது.
- எடுத்துக்காட்டு 1

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 6 \\ & 6 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} & 10 \\ \hline 11 & 110 \\ & 11 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

ஈவு $(10)_2$ மீதம் $= 0$

- எடுத்துக்காட்டு 2

இருநிலை எண் கணித வகுத்தல் மூலம் $18 \div 4$ என்பதன் விடையை காண முயலும்போது, இருநிலைப் புள்ளி எங்கே வைப்பது என்பது விளங்கும். இதன் விடை 4.5 என்பது நமக்கு தெரியும். இருநிலை வகுத்தல் முறையில் விடை காணப் பார்க்கலாம்.

$$(18)_{10} = (10010)_2$$
$$(4)_{10} = (100)_2$$

எனவே,

$$\begin{array}{r|l} & 100.1 \\ \hline 100 & 10010 \\ & 100 \\ \hline & \quad 100 \\ & \quad 100 \\ \hline & \qquad 0 \\ \hline \end{array}$$

ஈவு $(100.1)_2$ மீதம் $= 0$

2.6 1ன் மற்றும் 2ன் நிரப்பு முறைகள் (1's and 2's complement methods)

இருவித நிரப்பு முறைகள் உண்டு. அவை

(i) 1ன் நிரப்பு முறை (1's complement method)

(ii) 2ன் நிரப்பு முறை (2's complement method)

- கணிப்பொறிகள் நேர்மறை மற்றும் எதிர்மறை எண்களைக் கையாளும் திறன் பெற்றவை. "குறியுரு அளவு" (Signed magnitude) முறை இதற்குப் பயன்படுகிறது. இடது ஓர பிட் (Left most bit), மிகு மதிப்பு பிட் அல்லது (Most significant bit – MSB), அல்லது குறி பிட் (sign பிட்) மற்றும் சமநிலை பிட் (parity bit) இதற்கு உதவுகிறது.
- '+' அல்லது '-' குறியை முன்னொட்டாக எண்களில் இடுவது போல, இந்த பிட் செயல்படுகிறது
- கணிப்பொறிக்குத் தெரிந்தது 0,1 மட்டுமே.
- அதனால் இடது ஓர பிட் 0 எனில், அது நேர்மறை எண்ணைக் குறிக்கிறது. 1 எனில், அது எதிர்மறை எண்ணாகக் கருதப்படும். குறியுரு இருநிலை பிரதியிடுதல் என இதனை அழைக்கிறோம்.
- ஒரு 8 பிட் குறியுரு இருநிலை எண் முறையில் அதன் இடது ஓர பிட் குறியாகவும் (Sign), அடுத்துள்ள 7 பிட்கள் எண் மதிப்பை கூறும் (Magnitude) தரவு பிட்களாக செயல்படுகின்றன. இது Sign – magnitude முறை என அழைக்கப்படுகிறது.
- குறியுரு எண்களை குறிப்பிடுவதற்கு இந்த முறைகள் எளிதானவை.
- மின்னணு சுற்றுகளை (Electronic circuits) பயன்படுத்தி கூட்டல், கழித்தல், வகுத்தல் மதிப்புகளை காண முடியும். கழித்தல் மதிப்பை கண்டுபிடிக்க மின்னணு சுற்றுகளில் இந்த நிரப்பு முறைகள் மிகவும் பயன்படுகின்றன.

2.6.1 1ன் நிரப்பு முறை

எதிர்மறை எண்களை நேர்மறை எண்களில் இருந்து வேறுபடுத்தி காண்பிக்கும் எளிய முறை இது.

வழிமுறையின் படிகள்

- படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருநிலை எண்ணில் 8 பிட் உள்ளதா எனப் பார்க்கவும். (16 பிட்டாக எழுதும் முறையும் உண்டு).
- படி 2 : தரப்பட்ட எண்ணில் 8 பிட்டிற்குக் குறைவாக இருந்தால், முன்னொட்டாக 0க்களை சேர்த்து பிட் எண்ணாக எழுதவும்.
- படி 3 : இருநிலை எண்ணில் உள்ள பிட்களை தலைகீழாக மாற்றவும். எல்லா 0க்களையும் 1 எனவும், 1களை 0 எனவும் எழுத வேண்டும்.
- எடுத்துக்காட்டுகள்

(i)	$(1101)_2$	=	$(00001101)_2$
	1ன் நிரப்பி	=	11110010
(ii)	$(+47)_{10}$	=	$(0010\ 1111)_2$
	1ன் நிரப்பி	=	$(1101\ 0000)_2$
	எனவே, $(+47)_{10}$	=	1101 0000
(iii)	+6	=	$(0000\ 0110)_2$
	1ன் நிரப்பி	=	1111 1001
	எனவே, 1ன் நிரப்பு முறையில்		
	$(-6)_{10}$	=	1111 1011
(iv)	+96	=	$(0110\ 0000)_2$
	1ன் நிரப்பி	=	1001 1111
	எனவே $(-96)_{10}$	=	1001 1111

- மேலே தரப்பட்ட வழியைப் பின்பற்றி +0 மற்றும் -0விற்குமான எண்களை எழுதலாம்.

+0 = 0000 0000

1ன் நிரப்பி = 1111 1111

எனவே, இம்முறையில் -0 = 1111 1111 என்றாகிறது.

- -32,767 முதல் +32,767 வரையுள்ள எண்களை 16 பிட் எண்களாக எழுத முடியும்.

2.6.2 2ன் நிரப்பு முறை

ஒரு இருநிலை எண்ணை 2ன் நிரப்பு முறையில் எழுதத் தேவையான படிகள் இதோ.

- படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருநிலை எண்ணில் 8 பிட் உள்ளதா எனப் பார்க்கவும். (16 பிட்டாக எழுதும் முறையும் உண்டு).
- படி 2 : தரப்பட்ட எண்ணில் 8 பிட்டிற்குக் குறைவாக இருந்தால், முன்னொட்டாக 0க்களை சேர்த்து 8 பிட் எண்ணாக எழுதவும்.
- படி 3 : இருநிலை எண்ணில் உள்ள பிட்களை தலைகீழாக மாற்றவும்.

படி 4 : 1ன் நிரப்பியுடன் 1ஐக் கூட்டவும்.

மேலே 1ன் நிரப்பு முறையில் நாம் பார்த்த எடுத்துக்காட்டுகளுக்கு இங்கே 2ன் நிரப்பி மதிப்பு காணலாம்.

(i) $(1\ 1\ 0\ 1)_2$

1ன் நிரப்பி = 1111 0010

+ 1

1111 0011

2ன் நிரப்பி = 1111 0011

(ii) $(+47)_{10}$ = 0010 1111

1ன் நிரப்பி = 1101 0000

+ 1

2ன் நிரப்பி = 1101 0001

(iii) $(+6)_{10}$ = 0000 0110

1ன் நிரப்பி = 1111 1001

+ 1

2ன் நிரப்பி = 1111 1010

(iv) $(+96)_{10}$ = 0110 0000

1ன் நிரப்பி = 1001 1111

+ 1

2ன் நிரப்பி = 1010 0000

- மேலும் இந்த முறையில் 0வை ஒரு விதமாக மட்டுமே எழுத முடியும்.

0 = 0000 0000

1ன் நிரப்பி = 1111 1111

+ 1

$\boxed{1}$ 0000 0000

இங்கே நாம் எட்டு பிட்களை மட்டுமே கணக்கில் கொள்வதால், அதிகப் படி செல் எண்ணாக உள்ள 1ஐ விலக்கி விடலாம்.

- எனவே, இந்த முறையில் 0 என்பதற்கு ஒரு வடிவம் மட்டுமே உள்ளது என்பது இதன் சிறப்பு.
- 16 பிட் வடிவில் -32,768 முதல் +32,767 வரை உள்ள எண்களை இந்த முறையில் எழுதலாம்.

- எதிர்மறை எண்களை குறிக்க, 2ன் நிரப்பு முறையே மிக அதிகம் பயன்பாட்டில் உள்ள முறையாகும்.

பயிற்சி 2.9

1ன் நிரப்பு முறையில், 8 பிட் வடிவில் நாம் எழுதக்கூடிய மிகச்சிறிய எண் -127. ஆனால் 2ன் நிரப்பு முறையில் -128 என்பதே 8 பிட் வடிவ மிகச்சிறிய எண். விவரி.

விடை

(i) $(+127)_{10}$ = 0111 1111

1ன் நிரப்பி = 1000 0000

எனவே, $(-127)_{10}$ = 1000 0000

(ii) இதனோடு 1ஐக் கூட்டினால்,

```
            1000  0000
                +    1
            __________
2ன் நிரப்பி =1000  0001
```

$(-127)_{10}$ = 1000 0001 என்பதால், மேலும் ஒரு சிறிய எண்ணை, அதாவது, (-128) = 1000 0000 என எழுத 2ன் நிரப்பு முறையில் வழியுள்ளது.

பயிற்சி 2.10

23 = 10111. இதனை 8 இலக்க எண்ணாக மாற்றாமல், 2ன் நிரப்பி கண்டுபிடித்தால் ஏற்படும் தவறு என்ன? விவரி.

விடை

- இந்த முறையை பயன்படுத்த தரப்பட்டுள்ள இருநிலை எண்ணில் 8 பிட் இருப்பது அவசியம்.
- ஒருவேளை 23 = 10111 எனும் 5 பிட்களை மட்டும் பயன்படுத்தினால் நேரும் தவறை இங்கே பார்க்கலாம்.

- $(23)_{10}$ = 1 0 1 1 1
  1ன் நிரப்பி = 0 1 0 0 0
  \+ 1

  0 1 0 0 1

- இந்த 2ன் நிரப்பியை 8 பிட் உள்ளீடாகக் கணினிக்கு 0000 1001 எனத் தரும்போது, இதை +9 என்று அது புரிந்து கொள்ளும் வாய்ப்பு உள்ளது. இது முற்றிலும் தவறு.

- இதற்கு மீண்டும் 2ன் நிரப்பி கண்டுபிடித்தால் விடை தவறாக வரும்.

- ஆனால், முதலிலேயே இந்த எண்ணை 8 பிட் முறையில் எழுதினால்,
  $(23)_{10}$ = 0001 0111
  1ன் நிரப்பி = 1110 1000
  \+ 1

  2ன் நிரப்பி = 1110 1001

எனவே, (-23) = 1110 1001

இதற்கு மீண்டும் 2ன் நிரப்பி கணக்கிட்டால் விடை 23யை ஒத்துப்போகிறது. அதாவது [-(-23] = +23 என வருகிறது.

எனவே, 8 பிட் அமைப்பில், எல்லா பிட்களும் உள்ளனவா என சரிபார்த்த பின்புதான், இம்முறையை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

பயிற்சி 2.11

(-47)க்கான இருநிலைத் தொடரை குறியுரு அளவு (magnitude – sign) முறையில் எழுது.

விடை

$(+47)_{10}$ = 0010 1111

குறியுரு அளவில் மிகு மதிப்பு பிட் (MSB) + அல்லது - குறியை உணர்த்தும்.

எனவே, $(-47)_{10} = (1010\ 1111)_2$ ஆகும்.

2.7 நிரப்பு முறைகள் பயன்படுத்தி கழித்தல்

இருநிலை எண் முறையில் கழித்தல் செயல்பாடுகளைச் செய்வதற்கு கணினி கையாளும் மற்றொரு வழிதான் 1ன் மற்றும் 2ன் நிரப்பு முறை மூலம் கூட்டல்.

- இதன் மூலம் நாம் என்ன அறிகிறோம்? கூட்டல் சுற்றுகளே மற்ற கணிதச் செயல்பாடுகளை (கழித்தல், பெருக்கல் போன்றவை) செய்வதற்கு ஆதாரமாய் உள்ளன.
- 9ன், 10ன் நிரப்பு முறைகளும் உண்டு. உண்மையில், பலவித நிரப்பு முறைகளை நம்மால் வடிவமைக்க முடியும்.

2.8 ஒன்றின் நிரப்பு முறையில் கழித்தல்

இருநிலையில் இரண்டு எண்களைக் கழித்தல் செயல்பாட்டிற்காக எடுத்துக் கொள்வோம்.

- இந்த முறையில் மூன்று படிநிலைகள் உண்டு.
- இதில் கழிபடும் எண்ணை அப்படியே இருநிலை முறையில் எடுத்துக் கொள்ளவும்.
- கழிக்கும் எண்ணை 1ன் நிரப்பு முறையின் படி மாற்றி, அதனை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டவும்.
- கூட்டியபின் கிடைக்கும் விடையில் எத்தனை பிட் உள்ளது எனப் பார்க்க வேண்டும்.

- எடுத்துக் கொண்ட எண்களில் உள்ள மொத்த பிட் எண்ணிக்கையைத் தாண்டி, அதிக பிட் வந்தால அதனைக் கூட்டிவந்த விடையின் குறை மதிப்பு பிட்டுடன் (LSB) மறுபடியும் கூட்டவும்.
- இவ்வாறு மிகுதியாக வரும் பிட்டிற்கு கடை மிகுதி செல் எண் என்று பெயர். (End – around carry)
- செல் எண் வரவில்லை என்றால், கூட்டியபின் வந்த விடை (கூட்டுத்தொகை) எதிர்மறை எண் (Negative number), என புரிந்து கொள்ள வேண்டும்.
- மேலும் அந்த விடை ஒன்றின் நிரப்பு முறையில் உள்ளது எனக் கொள்ள வேண்டும்.

பயிற்சி 2.12

13லிருந்து 4ஐக் கழிக்கவும். இதை ஒன்றின் நிரப்பு முறையில் செய்யவும்.

விடை

பதின்ம நிலை		இருநிலை
13	கழிபடும் எண்	1101
- 4	கழிக்கும் எண்	- 0100
9		1001

இதனை 1ன் நிரப்புமுறையில் கழிப்போமா?

- கழிபடும் எண் = 1101
- கழிக்கும் எண் = 0100
- இதன் 1ன் நிரப்பி = 1011

- அடுத்து, இதை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டலாம்.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\ \underline{1011} \\ \boxed{1}\ \underline{1000} \end{array}$$

- இதில் $\boxed{1}$ என்பது கடைமிகுதி செல்எண் (End – around carry) - விடை நேர்மறை எண் என்பதை இது குறிக்கிறது.
- 1000 என்பது கூட்டல் விடை.
- இப்போது கடைமிகுதி செல்எண்ணைக் கூட்டல் விடையுடன் மீண்டும் கூட்டவும்.

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \underline{+\ \ \ 1} \\ \underline{1001} \end{array}$$

- கூட்டுத்தொகை 1001

விடை : 1001; நேர்மறை எண்

குறிப்பு : கழிபடும் எண்ணிலும், கழிக்கும் எண்ணிலும் ஒரே எண்ணிக்கையில் பிட்கள் இருக்க வேண்டும். சென்ற பயிற்சி 2.12இல் கழிக்கும் எண், இரண்டுமே நான்கு பிட்கள் கொண்ட இருநிலை எண்கள் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

பயிற்சி 2.13

14ஐ 17 இல் இருந்து கழிக்கவும்.

விடை

பதின்மநிலை		இருநிலை
17	கழிபடும் எண்	10001
- 14	கழிக்கும் எண்	- 01110
3		00011

இதனை 1ன் நிரப்பு முறையில் கழிப்போமா?

- கழிபடும் எண் = 10001
- கழிக்கும் எண் = 01110
- இதன் 1ன் நிரப்பி = 10001
- அடுத்து, இதை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டலாம்.

$$\begin{array}{r} 10001 \\ +\ \underline{10001} \\ \boxed{1}\ \underline{00010} \end{array}$$

- இதில், $\boxed{1}$ என்பது கடைமிகுதி செல்எண் (end around carry)
- விடை நேர்மறை எண் என்பதை இது குறிக்கிறது
- இப்போது கடைமிகு செல்எண்ணைக் கூட்டல் விடையுடன் மீண்டும் கூட்டவும்.

$$\begin{array}{r} 00010 \\ \underline{+\quad 1} \\ \underline{00011} \end{array}$$

- கூட்டுத்தொகை = 00011
- விடை = 00011; நேர்மறை எண்

இந்த பயிற்சியில் கழிபடும் எண்ணும், கழிக்கும் எண்ணும் (5 பிட்கள் கொண்டவை) ஒரே எண்ணிக்கையில் பிட்கள் கொண்டுள்ளன என்பதை கவனிக்கவும்.

2.8.1 சிறிய கழிப்படும் எண்

கழிபடும் எண் (Minuend), கழிக்கும் எண்ணை விடப் (Subtrahend) பெரியதாக இருந்தால் விடை நேர்மறையாக (Positive number) வரும் என்பது நாம் அறிந்ததே. கழிபடும் எண், கழிக்கும் எண்ணை விடச் சிறியதாக இருந்தால், விடை எதிர்மறை எண்ணாக வரும் அல்லவா?

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் அதைக் காண்போம்.

- எடுத்துக்காட்டு
- 13 லிருந்து 18ஐ கழிக்கப் பார்க்கலாம்.
- இதில் 13 கழிபடும் எண்.
- 13ன் இருநிலை மதிப்பு = 1101
- 18 என்பது கழிக்கும் எண்.
- 18ன் இருநிலை மதிப்பு = 10010
- 18-ல் 5 பிட்கள் உள்ளதால், அதே நீளத்தில் 13ஐயும் எழுத வேண்டும். எனவே,

  13 = 01101
- 18னுடைய 1ன் நிரப்பி = 01101
- இதை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டினால்,

$$\begin{array}{r} 01101 \\ +\underline{01101} \\ \underline{11010} \end{array}$$

- இதில் கடைமிகுதி செல்எண் உருவாகவில்லை. எனவே இந்த விடை எதிர்மறையாக உள்ளதை சுட்டுகிறது.
- மேலும் விடை 1ன் நிரப்பியாக உள்ளது. சரியான விடை காண 11010 வின் 1ன் நிரப்பி கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.
- சரியான விடை : 00101 ஆகும்.
- $(101)_2$ என்பது $(5)_{10}$ஐக் குறிக்கும் என நமக்குத் தெரியும்.
- எதிர்மறை எண்ணாக இது உள்ளது.

2.9 இரண்டின் நிரப்பு முறையில் கழித்தல்

இம்முறையில் உள்ள படிநிலைகளை காண்போம்.

- கழிபடும் எண்ணை அப்படியே இருநிலையில் வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.
- கழிக்கும் எண்ணை, 2ன் நிரப்பு முறையின்படி மாற்றி, அதனை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டவும்.
- செல்எண் பிட் வந்தால், அதனைப் புறக்கணித்து விடவும்.
- செல்எண் பிட் வரவில்லை என்றால், விடை எதிர்மறை எண்ணாக இருப்பதை அதை சுட்டுகிறது.
- மேலும் விடை 2ன் நிரப்பு முறையில் இருக்கும்.
- எடுத்துக்காட்டு
- 12 லிருந்து 6 ஐக் கழிக்கவும்.
- இதில் 12 கழிபடும் எண்
- 12ன் இருநிலை மதிப்பு = 1100
- 6 என்பது கழிக்கும் எண்
- 6 எண் இருநிலை மதிப்பு = 0110
- கழிக்கும் எண்ணின் 1ன் நிரப்பி = 1001
- இதன் 2ன் நிரப்பி

$$\begin{array}{r} 1001 \\ +\quad 1 \\ \hline 1010 \\ \hline \end{array}$$

- 2ன் நிரப்பியை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டலாம்.

$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\underline{1010} \\ \boxed{1}\,\underline{0110} \end{array}$$

- இங்கு கடைமிகுதி செல்எண் $\boxed{1}$ வந்துள்ளது.
- எனவே விடை நேர்மறை எண் என்பதை இது உணர்த்துகிறது.
- கடைமிகுதி செல்எண்ணை விலக்கி விட்டால், வருவதே சரியான விடை.
- இங்கே சரியான விடை 0110, நேர்மறை எண்.

2.9.1 கழிபடும் எண் சிறியது

இனி கழிபடும் எண், கழிக்கும் எண்ணை விடச் சிறியதாக இருந்தால், விடை இரண்டின் நிரப்பு முறையில் எவ்வாறு கிடைக்கும் எனக் காண்போமா ?

எடுத்துக்காட்டு

- 18ஐ 13 இலிருந்து கழிக்கவும்.
- இதில் கழிபடும் எண் 13
- 13ன் இருநிலை மதிப்பு = 1101
- கழிக்கும் எண் 18
- 18ன் இருநிலை மதிப்பு = 10010
- 18ல் ஐந்து பிட்கள் உள்ளதால், அதே நீளத்தில் 13ஐயும் எழுத வேண்டும். எனவே, 13 = 01101
- 18னுடைய 1ன் நிரப்பி = 01101

- இதன் 2ன் நிரப்பி

$$\begin{array}{r} 01101 \\ +\quad 1 \\ \hline 01110 \end{array}$$

- 2ன் நிரப்பியை கழிபடும் எண்ணோடு கூட்டலாம்.

$$\begin{array}{r} 01101 \\ +01110 \\ \hline 11011 \end{array}$$

- இதில் கடை மிகுதி செல் எண் உருவாகவில்லை. எனவே இந்த விடை எதிர்மறையாக உள்ளதை இது சுட்டுகிறது.

- மேலும் விடை 2ன் நிரப்பியாக உள்ளது.

- எனவே சரியான விடை காண, 11011 என்பதன் 2ன் நிரப்பி கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{r} 00100 \\ +\quad 1 \\ \hline 00101 \end{array}$$

- சரியான விடை 00101 ஆகும். இது எதிர்மறை எண்ணாக உள்ளது.

- மேலும் 101 என்பது 5ஐக் குறிக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும். எனவே இது சரியான விடை.

- 1ன் நிரப்பி வழிமுறையிலும் இதே விடையை நாம் ஏற்கனவே பெற்றுள்ளோம் என்பதை நினைவில் கொள்க.

2.10 நேர்மறை எண்ணுடன் எதிர்மறை எண்ணை கூட்டுதல்

குறியுரு எண்களை 2ன் நிரப்புமறை கொண்டு எவ்வாறு கூட்டலாம் என இங்கே பார்க்கப் போகிறோம்.

- கூட்டப்படும் இரண்டு எண்களும் ஒரே நீளத்தில் இருக்க வேண்டும்.

- +/- குறியை மிகு மதிப்பு பிட் (MSB) சுட்டிக்காட்டுகிறது.
- எடுத்துக்காட்டு ஒன்று
- +5 மற்றும் +2 எனும் இரு எண்களை இப்போது கூட்டலாம்.

+5	=		0 000 101
+2	=	+	0 000 010
	=		$\boxed{0}$ 000 111

- கூட்டுத் தொகையின் மிகு மதிப்பு பிட் 0 என உள்ளதால், இது ஒரு நேர்மறை எண்.
- கூட்டுத் தொகை : 00000111; நேர்மறை
- $(111)_2 = (7)_{10}$ என்பதால் நம் வழிமுறை சரியானது என்பது உறுதியாகிறது.

பயிற்சி 2.14

(-7) + (+5) = (-2) என்பது நமக்கு தெரியும். இதனை 2ன் நிரப்பு முறையில் நிறுவுக. நான்கு பிட் அமைப்பை பயன்படுத்தவும்.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள கணக்கு (-7) + (+5)
- நான்கு பிட் கோர்வைகளை பயன்படுத்த வேண்டும்.
- 7 = 0111 ; 5 = 0101
- முதலில், -7ஐ 2ன் நிரப்புமுறையில் நான்கு பிட் கோர்வையாக மாற்றலாம்.
- 7ன் இருநிலை மதிப்பு = 0111
- இதன் 1ன் நிரப்பி = 1000

  \+ 1

- இதன் 2ன் நிரப்பி = 1001
- எனவே,
- (-7) + (+5) = 1001

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{+\,0101} \\ 1110 \end{array}$$

- பெறப்பட்ட விடை : 1110 ஆகும்.

- கூட்டுத் தொகையில் கடை மிகுதி செல் எண் உருவாகாததால், இது எதிர்மறை எண்ணை குறிக்கிறது.

- மேலும் இது 2ன் நிரப்பி வடிவில் உள்ளது.

- இதன் 2ன் நிரப்பி $= 0001 + 1 = 0010 = (2)_{10}$

- எனவே, 2ன் நிரப்பு முறையிலும் விடை காண முடியும் என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 2.15

நான்கு பிட் கோர்வைகள் மூலம் (-4) + (4) என்பதன் விடை காணவும்.

2ன் நிரப்புமுறையை பயன்படுத்தவும்.

விடை

(-4) + (4) = 0 என்பது நமக்கும் தெரியும்.

+ 4 = 0100

-4ன் மதிப்பை 1ன் நிரப்பு முறை மூலம் காண வேண்டும்

+4 மதிப்பு = 0100
இதன் 1ன் நிரப்பி = 1011

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{+\quad 1} \end{array}$$

- 1ன் நிரப்பி = 1100

- எனவே, -4 = 1100

- இதனால்,

$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\underline{0100} \\ \boxed{1}\,\underline{0000} \end{array}$$

- அதிகப்படி செல்எண் பிட் உருவாகி உள்ளது. இதனை ஒதுக்கிவிடலாம்.
- மீதி உள்ள நான்கு பிட்கள் மூலம் கிடைக்கும் விடை 0000

வினாக்கள்

குறுவினாக்கள்

1. பின்வருவனவற்றின் 1ன் நிரப்பியை எழுதவும்.

   (i) 1 0 0 1

   (ii) 1 0 0 0 0 1 0 0

2. பின்வருவனவற்றின் 2ன் நிரப்பியை எழுதவும்.

   (i) 1 1 0 1 1

   (ii) 0 1 1 1 0 1

3. நிரப்பு முறையில் கழிக்கும்போது, பெறப்படும் கடைமிகுதி எண் எதை உணர்த்துகிறது?

சிறுவினாக்கள்

1. கீழ்க்காணும் பதின்மநிலை எண்களை இருநிலை முறையில் கூட்டவும்.

   (i) 3 + 4

   (ii) 4 + 6

   (iii) 100 + 15

2. பின்வரும் கழித்தல்களை இருநிலை எண் முறையில் கணக்கிடவும்.

   (i) 74 - 27

   (ii) 91.5 – 21.75

3. இருநிலை எண்முறையில் பின்வரும் பெருக்கல்களைச் செய்யவும்.

   (i) 5 x 7

   (ii) 11 x 10

நெடுவினாக்கள்

1. இரண்டின் நிரப்பு முறையில், பின்வரும் எண்களைக் கூட்டவும்.

   (i) (47) + (-15)

   (ii) (-47) + (-15)

   (iii) (-47) + (+15)

2. 1ன் நிரப்பு முறை, 2ன் நிரப்பு முறைகளின் வழிமுறையை எழுதுக. இரண்டு முறைகளிலும் பெறப்படும் விடை சமம் என்பதை எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் நிறுவுக.

பாடம் 3

தர்க்க வாயில்கள்

இப்பாடத்தின் கற்றல் நோக்கங்கள்

- அடிப்படை தர்க்க வாயில்களான AND, OR மற்றும் NOT வாயில்களின் செயற்பாடுகளை புரிந்து கொள்ளுதல்
- இவற்றின் மெய்ப்பட்டியல் அமைக்கக் கற்றல்
- இவற்றின் தர்க்க குறியை வரைதல்
- NAND, NOR, EX-OR, EX-NOR வாயில்களை வடிவமைத்தல்
- அன்றாட நிகழ்வுகளை தர்க்க வழியில் வகைப்படுத்துதல்

3.1 அறிமுகம்

டிஜிடல் சுற்றுகள் இரண்டு நிலைகளை கொண்டது - ON மற்றும் OFF. இதனை HIGH மற்றும் LOW அல்லது மெய் மற்றும் பொய் என்றும் கூறலாம். இந்த நிலைகளை நாம், முறையே '1' மற்றும் '0' எனும் இரண்டு குறியீடுகளால் குறிக்கலாம். இங்கே இரண்டே இரண்டு குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படும் காரணத்தால், டிஜிடல் வழிமுறைகளை புரிந்து கொள்ளவும், செயல்பாடுகளை நிகழ்த்தவும் இருநிலை எண்முறை உதவுகிறது. இது தொடர்பான இயற்கணிதத்தை, இக்கால முறைக்கு ஏற்றபடி வகுத்துத் தந்தவர் ஜார்ஜ பூல் (George Boole) ஆங்கில அறிஞர். இந்த முறைக்கு பூலியன் இயற்கணிதம் (Boolean Algebra) என்று பெயர்.

3.2 தர்க்க சுற்றுகள்

டிஜிடல் சுற்றுகளை (Digital Circuits) கட்டமைக்க பூலியன் இயற்கணிதத்தை பயன்படுத்துகிறோம். இதில் தர்க்க முறையும், தர்க்க

வாயில்களும், தர்க்க செயல்பாடுகளும் அடிப்படையாக இருப்பதால், இத்தகு சுற்றுகளை தர்க்க சுற்றுகள் (Logic circuits) என அழைக்கிறோம்.

தர்க்க சுற்றுகன் அல்லது லாஜிக் சுற்றுகளில் இரண்டே குறியீடுகள்தான் உள்ளன. அவை ‘1’ மற்றும் ‘0’ என்பன. HIGH அல்லது ‘1’ அதிக மின்னழுத்தத்தை (பொதுவாக 5V) குறிக்கப் பயன்படுகிறது. மேலும், LOW அல்லது ‘0’ குறைந்த மின்னழுத்தத்தை (பொதுவாக OV) குறிக்க உதவுகிறது. இந்த இரண்டு குறியீடுகளைக் கொண்டே, நாம் பல தர்க்க செயல்பாடுகளை இங்கே கற்றுக்கொள்ளப் போகிறோம்.

3.3 அன்றாட செயல்பாடுகளை அலசலாம்

பூலியன் இயற்கணிதத்தை புரிந்துகொள்ள ஒருசில நிகழ்வுகளை பார்க்கலாம்.

i. இயற்பியல், கணினி, வேதியியல், உயிரியல் போன்ற பாடங்களில் எழுத்துத் தேர்வு, செயல்முறைத் தேர்வு என இரண்டு பகுதிகள் உண்டு. இல்லையா? இந்த இரண்டு பகுதிகளிலும் தேர்ச்சி அடைந்தால் மட்டுமே, ஒருவர் அந்த குறிப்பிட்ட பாடத்தில் தேர்ச்சி அடைய முடியும்.

ii. உங்கள் வீட்டின் சத்தான காலை உணவுகள் இதோ : சாமை இட்லி, கம்பங்கூழ், வரகரிசி பொங்கல், இதில் ஒன்றையோ, இரண்டையோ அல்லது எல்லாவற்றையுமோ கூட நீங்கள் சாப்பிட முடியும்.

iii. தேர்வுக்கு கட்டணம் செலுத்த வேண்டும். NEFT மூலமோ அல்லது காசோலையாகவோ அல்லது பிற வழிகளில் தரப்பட்ட வங்கிக் கணக்கில் பணம் செலுத்த இயலும்.

iv. பூக்கார அம்மாவிடம் இரண்டு முழம் பூ வாங்கியதற்கு பணம் பெற்றுக்கொள்ள செயலி இருக்கிறது என்று அவர் சொன்னால், உங்களுக்கு இரண்டு வழிகள் உள்ளன: பணமாகத் தரலாம். அல்லது செயலி மூலம் அனுப்பலாம்.

v. விமானப் பயணம் செய்ய விமான நிலையத்திற்குள் நுழையும் இப்போது முதல் கட்ட சோதனையாக நம்மிடம் அன்றைய விமானத்திற்கான பயணச் சீட்டும், கூடவே நமக்கான (ஆதார், பாஸ்போர்ட் போன்றவை) அடையாளச் சான்றும் உள்ளதா என்றும் உறுதி செய்வார்கள்.

மேலே தரப்பட்டுள்ள நிகழ்வுகளை இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

I. செயல் முழுமையடைய அனைத்து நிபந்தனைகளும் நிறைவேறியிருக்க வேண்டும். ஒன்று விடுபட்டால் கூட செயல் முடிவுறாது.

II. செயல் முழுமை அடைய, தரப்பட்டுள்ள வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்று போதுமானது. எனவே ஒன்றோ அல்லது அதிகமானவற்றையோ தேர்வு செய்யும் வாய்ப்பு இதில் உள்ளது.

Iன் கீழ் : i), v) ஆகியவற்றையும் வகைப்படுத்தலாம்

IIன் கீழ் : ii), iii), iv) ஆகியவற்றையும் வகைப்படுத்தலாம்

3.4 நிகழ்வுகளைக் கொண்டு பட்டியல் இடுதல்

மேலே கூறப்பட்டு நிகழ்வுகளைக் கொண்டு பட்டியல் தயாரிக்கப் பார்க்கலாம்.

i)

எழுத்துத் தேர்வு	**செய்முறை தேர்வு**	**தேர்ச்சி அடைதல்**
×	×	×
×	✓	×
✓	×	×
✓	✓	✓

ii)

சாமை இட்லி	கம்பங்கூழ்	வரகரிசி பொங்கல்	காலை உணவு
✗	✗	✗	✗
✗	✗	✓	✓
✗	✓	✗	✓
✓	✗	✗	✓
✗	✓	✓	✓
✓	✗	✓	✓
✓	✓	✗	✓
✓	✓	✓	✓

iii)

NEFT முறை	காசோலை	கட்டணம் செலுத்துதல்
✗	✗	✗
✓	✗	✓
✗	✓	✓
✓	✓	✓

iv)

பணமாக பெறுதல்	செயலி வழியாக	விற்பனை
✗	✗	✗
✓	✗	✓
✗	✓	✓
✓	✓	✓

v)

பயணச் சீட்டு	அடையாளச் சான்று	உள்ளே நுழைதல்
✗	✗	✗
✗	✓	✗
✓	✗	✗
✓	✓	✓

மேலே உள்ள பட்டியல்களில் '✓' குறி நிகழ்வு நடந்தையோ, குறிப்பிட்ட அந்த வழி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதையோ உணர்த்துகிறது. இங்கே '✗' குறி அவ்வாறு நிகழாததை உணர்த்துகிறது.

நம்மால் எந்த ஒரு நிகழ்வையும், அதில் உள்ள எல்லா வாய்ப்புகளையும் வழிகளையும், யோசித்து பட்டியலாகவோ அட்டவணையாக மாற்ற முடியும் என்பதை இதன் மூலம் அறிந்து கொண்டோம். ஒரு நிகழ்வை, இவ்வாறு தர்க்க ரீதியில் அட்டவணைப்படுத்துவது மிக முக்கியமான திறன். நிரல் எழுதத் தேவையான முதல்படி என்றுகூட சொல்லலாம். ஒரு குழுவை வழிநடத்த, தரப்பட்ட வேலையை சரியாக செய்து முடிக்க நாம் வளர்த்துக் கொள்ள வேண்டிய பண்பும் இது. சிந்தித்து செயல்பட, எது முடியும், எதனால் முடியும் என மனதில் பட்டியலிட்ட பின்பே வேலையை தொடங்க வேண்டும். மனிதன் வடிவமைத்த கணினியானது தரப்பட்ட வேலையை நிகழ்த்துவதற்குத் தேவையான நிரலின் முதல்படியாக இதை அமைத்தான்.

வாக்கியத்தின் மூலம் ஒரு நிகழ்வை விவரித்தல் என்ற நிலையிலிருந்து. அதனை அட்டவணை மூலம் புரியவைத்தல் என்ற அடுத்த கட்டத்திற்கு நகர்ந்துள்ளோம். அடுத்ததாக, தர்க்க வாயில்கள் மூலம் நிகழ்வை எப்படி வெளிப்படுத்துவது என்பதை பார்க்கப் போகிறோம்.

3.5 அடிப்படை தர்க்க வாயில்கள்

தர்க்க வாயில் என்பது

- அடிப்படை மின்னணு சுற்று (Electronic circuit)
- பூலியன் இயற்கணித விதிகளை பின்பற்றும்.
- ஒன்றோ அல்லது அதிகமாகவோ உள்ளீடுகள் இருக்கும்
- ஒரே ஒரு வெளியீடு பெற்றிருக்கும்.
- ‘1’ அல்லது ‘0’ எனும் நிலைகள் மட்டுமே இருக்கும் என்பதால் இது ஒரு டிஜிடல் சுற்று (Digital circuit)
- அடிப்படை வாயில்கள் மூன்று வகைப்படும் : AND, OR, NOT
- அடிப்படை வாயில்களின் உதவியால் பலவித வாயில்களை உருவாக்க முடியும்.

3.5.1 அனைத்தும் வாயில் – AND gate

மேலே 3.3யில் நாம் பார்த்த (I)வகை நிகழ்வுகளில் அனைத்து நிபந்தனைகளும் நிறைவேறினால் மட்டுமே அந்த நிகழ்வு நிறைவுறும். பட்டியலும் நமக்கு இதையே சுட்டிக் காட்டுகிறது. இல்லையா? உள்ளீடுகள் அனைத்தும் 1=HIGH = மெய்யாக இருந்தால் மட்டுமே வெளியீடு ‘மெய்’யாக நிகழமுடியும் எனில், அத்தகையை நிகழ்வை ‘அனைத்தும்’ வாயில் (AND gate) என தர்க்க வழியில் வகைப்படுத்தலாம்.

கணித வகுப்பில் நாம் கற்கும் ‘பெருக்கல்’ முறையை இதன் மெய்பட்டியல் ஒத்திருப்பதால், அதே செயற்குறியீட்டை இங்கேயும் பயன்படுத்துகிறோம்.

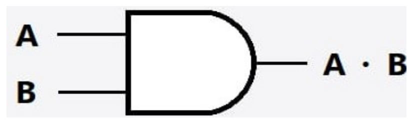
எனவே, AND தர்க்க விதியை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$\boxed{Y = A.B}$$

இதில் '.' குறி என்பது AND செயற்குறி. '*'யையும் பயன்படுத்தலாம்.

$Y = A*B$ என்றும், $Y = AB$ என்றும் இதை எழுதலாம். இதை $Y = A$ AND B என வாசிக்க வேண்டும்.

இதில் *'A'*, *'B'* ஆகியவை உள்ளீடுகள் *'Y'* என்பது வெளியீட்டை குறிக்கிறது.



AND தர்க்க குறி

நினைவில் கொள்க *:*

AND எனும் சொல்லில் உள்ள Dயை கொள் ஒத்துள்ள வடிவம் AND வாயிலில் உள்ள எல்லா / அனைத்து உள்ளீடுகளும் (இங்கே, **'A'** மற்றும் **'B'**) மெய் ஆக இருந்தால் மட்டுமே வெளியீடு **(Y)** மெய்யாக இருக்கும். ஒரே ஒரு உள்ளீடு பொய் = **0** ஆக இருந்தாலும் **Y**ன் மதிப்பு **O**ஆகிவிடும். இதனை மெய்ப்பட்டியலும் தெரிவிக்கிறது.

AND வாயிலின் மெய்ப்பட்டியல்

நிகழ்வு (i)ன் செயல்பட்டியலை ஏற்கனவே பார்த்துள்ளோம். இதில் உள்ள '✓' குறிகளுக்கு '1' எனும் மதிப்பையும் '×' குறிக்கு '0' மதிப்பையும் தந்தால், நமக்குக் கிடைப்பது (அனைத்தும்) வாயிலின் மெய்ப்பட்டியல் ஆகும்.

AND மெய்ப்பட்டியல்

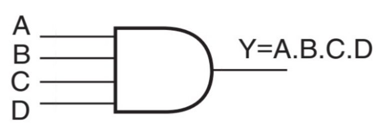
A	*B*	*Y=A.B*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

பல உள்ளீடுகள் கொண்ட AND வாயில்

படிப்பிற்கு பரிந்துரை செய்யப்பட்டுள்ள அனைத்துப் பாடங்களிலும் தேர்ச்சி பெறுவதோடு விடையாட்டு, அறநெறி, கலை இலக்கிய நிகழ்ச்சிகளில் பங்கேற்பு என பாடம் சாரா பிற கட்டாய செயல்பாடுகளிலும் ஈடுபட்டு, எல்லா விதிமுறகளையும் கடைபிடித்தால் மட்டுமே பட்டம் கிடைக்கும். இது போல, தரப்பட்ட நிபந்தனைகள் அனைத்தையும் நிறைவு செய்தல் என்பதை புரிந்துகொள்ள பல உள்ளீடுகள் கொண்ட AND வாயில் உதவும்.

பல உள்ளீடுகள் (A முதல் N எனக் கொள்ளலாம்) உள்ள ஒரு வாயிலின் தர்க்க விதி கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதில் எல்லா உள்ளீடுகளும் எனும்போது மட்டுமே, Y=1 என்றாகும்.

$$\boxed{\begin{aligned} Y &= A.B.C.D.\dots\ N = ABCD\dots\ N \\ &= A * B * C * D * \dots N \end{aligned}}$$



பல உள்ளீடுகள் உடைய AND வாயிலின் தர்க்க குறி

3.5.2 ‘அல்லது’ வாயில் - OR gate

நாம் 3.3ல் பார்த்த (II)வகை நிகழ்வுகள் நிறைவேற, ஏதேனும் ஒரு நிபந்தனை நிறைவேறினால் கூட போதுமானது. முதலாவதோ அல்லது இரண்டாவதோ, அல்லது எல்லாமுமோ – எது நிறைவேறினாலும் நிகழ்வு சாத்தியமாகும். செயல்பட்டியலும் இதைத்தான் சுட்டிக் காட்டுகிறது.

ஏதேனும் ஒன்றோ அல்லது மேற்பட்ட உள்ளீடோ HIGH = 1=மெய்யாக இருந்தால், வெளியீடு ‘மெய்’யாக ஆகும். அத்தகைய நிகழ்வை ‘அல்லது’ வாயில் (OR gate) என தர்க்க வழியில் வகைப்படுத்தலாம். இதில், எல்லா உள்ளீடுகளும் ‘0’வானால் மட்டுமே வெளியீடும் 0வாக ஆகும்.

கணித வகுப்பில் கற்கும் ‘கூட்டல்’ முறையை இதன் மெய்பட்டியல் ஒத்திருப்பதால், ‘+’ குறியீட்டை OR வாயிலுக்கு செயற்குறியாக பயன்படுத்துகிறோம்.

எனவே, OR தர்க்க விதியை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$\boxed{Y = A + B}$$

இதனை A OR B என வாசிக்க வேண்டும். ‘+’ என்பது OR செயற்குறி. இங்கு *‘A’, ‘B’* ஆகியவை உள்ளீடுகளையும் *‘Y’* என்பது வெளியீட்டையும் சுட்டும்.

OR வாயிலின் மெய்பட்டியல்

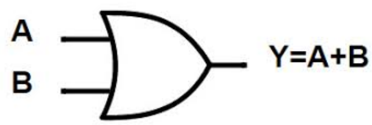
AND மெய்பட்டியலை உருவாக்கியது போலவே, OR வாயிலுக்கும் மெய்பட்டியலை எழுதமுடியும். அதற்கு, நிகழ்வு (ii)ஐ எடுத்துக்கொள்ளலாம். இதன் பட்டியலில் உள்ள ‘✓’ மற்றும் குறிகளுக்கு ‘×’ பதிலாக, முறையே ‘1’ மற்றும் ‘0’வை பொருத்தினால் நமக்குக் கிடைப்பது OR வாயிலின் மெய்பட்டியல் ஆகும்.

OR மெய்பட்டியல்

A	***B***	***Y=A+B***
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

நினைவில் கொள்க :

சாதாரண கூட்டலில், 1+1=2. ஆனால், இங்கே ‘1’ என்பது ‘மெய்’ , ‘உள்ளது’ ‘உண்மை’ High’ என்பதற்கான குறியீடு. அவ்வளவு தான். அதற்கு எண் மதிப்பு கிடையாது. அதுபோலவே ‘0’ என்பது இங்கு ‘LOW’ என்பதை உணர்த்தும் குறியீடு. எனவே பூலியன் இயற்கணிதத்தில், HIGH + HIGH = HIGH எனும் பொருளில், 1+1=1 என்பதையே குறிக்கும்.



OR தர்க்க குறி

OR வாயிலில் உள்ள ஏதாவது ஒன்றோ (இங்கே A அல்லது B) அல்லது இரண்டு உள்ளீடுகளும் மெய்=1 என இருந்தால், இவ்வாயிலின் வெளியீடு Y ‘மெய்’யாக இருக்கும். எல்லா உள்ளீடுகளும் ‘0’வாக இருந்தால் மட்டுமே $Y=0$ என ஆகும். இதனை மெய்ப்பட்டியலும் உணர்த்துகிறது.

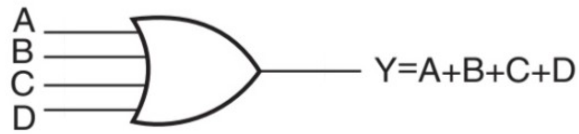
பல உள்ளீடுகள் கொண்ட OR வாயில்

ஹோட்டலுக்கு செல்லும்போது, அங்கே தயாராக இருக்கும் உணவுகளின் ‘பட்டியலை’ (MENU CARD) தருவார்கள் அதில் உள்ள ஒன்றையோ, பலதையோ (ஏன், எல்லாவற்றையுமே கூட!) வாங்க முடியும். இந்தச் சூழலை, பல உள்ளீடுகள் கொண்ட ஒரு OR வாயில் வழியே எளிதில் விவரிக்க முடியும்.

பல உள்ளீடுகள் (A முதல் N வரை எனக் கொள்ளலாம்) கொண்ட ஒரு OR வாயிலின் தர்க்க விதி இதோ

$$\boxed{Y = A + B + C + \ldots N}$$

A அல்லது B அல்லது $\ldots N$ வரை ஏதாவது ஒன்றோ மேற்பட்ட உள்ளீடுகளோ ‘1’ என்றாகும் போது $Y=1$ ஆகும்.



பல உள்ளீடுகள் உடைய *OR* வாயிலின் தர்க்க குறி

3.5.3 தலைகீழி / தலைகீழ் புரட்டி வாயில் - NOT gate

தரப்படும் உள்ளீட்டை தலைகீழாக மாற்றும் பண்பு உடையது NOT வாயில். உள்ளீடு '1' என்பது 0 வெளியீடாகவும், 'O' உள்ளீடு வெளியீடாகவும் NOT வாயிலால் தலைகீழாக புரட்டப்படும்.

NOT வாயிலுக்கு ஒரே ஒரு உள்ளீடு மட்டுமே உண்டு. OR மற்றும் AND வாயில்களைப் போல் பல உள்ளீடுகள் இதற்குக் கிடையாது.

NOT தர்க்க விதியை இவ்வாறு எழுதலாம்.

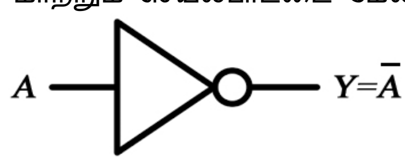
$$\boxed{Y = \bar{A}} \qquad [\bar{A} = A' = \dot{A}\ ]$$

A என்ற உள்ளீட்டை தலைகீழாக மாற்றும் செயல்பாடு இது.

A வின் தலைகீழி (Inverse) NOT A என்று இதனை வாசிக்கலாம். இதனை என்றும் A' என்றும் $\dot{A}$ எழுதலாம்.

நினைவில் கொள்க :

மேல் கோடு தலைகீழாக மாற்றும் செயல்பாட்டை மேல்கோடு (Bar) குறிக்கின்றது.



NOT தர்க்க குறி

மேலே வரையப்பட்டுள்ள தர்க்கக்குறி இரண்டு குறிகளின் சேர்க்கையால் உருவானது. i) முக்கோணம் (Triangle) ii) குமிழி வட்டம் (Bubble). முக்கோணம் buffer எனும் செயல்பாட்டையும், குமிழி தலைகீழ் மாற்றங்களையும் குறிக்கின்றன.

NOT வாயிலின் உள்ளீடு A = 0 எனில், வெளியீடு Y = 1. இதன் உள்ளீடு '1' எனில் வெளியீடு 0 ஆகும் இதை மெய்பட்டியல் வடிவில் எழுதலாம்.

NOT மெய்ப்பட்டியல்

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

நினைவில் கொள்க :

NOT வாயிலை பிற வாயில்களோடு இணைத்து டிஜிட்டல் சுற்றுகளை வடிவமைக்கும் போது, இந்த வாயிலை o எனும் குறியால் உணர்த்துவது நடைமுறை வழக்கம். NOT எனும் சொல்லின் நடுவில் உள்ள 'O' எழுத்தின் வடிவம் இது.

3.6 இன்னும் சில வாயில்கள்

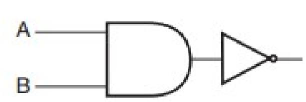
அடிப்படை தற்க வாயில்களை தொகுத்து, மேலும் சில முக்கிய வாயில்களை கட்டமைக்க முடியும். NAND, NOR, EX-OR, EX-NOR போன்றவை இவற்றுள் அடங்கும். இவற்றின் பயன்பாடு அதிகம் என்பதால் இத்தகைய தொகுதி வாயில்களைப் பற்றி இப்போது பார்க்கலாம்.

3.6.1 NAND வாயில்

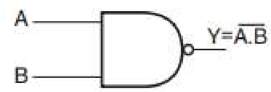
AND வாயிலைத் தொடர்ந்த NOT வாயிலின் கூட்டமைப்பே NAND வாயில் ஆகும். இரண்டு உள்ளீடுகள் கொண்ட ஒரு NAND வாயிலின் செயல்பாட்டை இங்கே பார்க்கலாம். NAND வாயிலின் தர்க்க விதி :

$$\boxed{Y = \overline{A.B}}$$

இதன் தர்க்க குறி :



(i)



(ii)

குறிப்பு : (ii)வது NAND தர்க்க குறி NOT வாயிலுக்கு பதிலாக வட்டத்தை மட்டுமே பயன்படுத்தி (ii) சுருக்கமாக வரையப்பட்டுள்ளது.

NAND மெய்ப்பட்டியல்

A	*B*	*AB*	$Y = \overline{A.B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

- NAND வாயிலின் தலைகீழ் செயல்பாடே NAND வாயிலின் மெய்ப்பட்டியலை பார்க்கையில் இது நமக்குப் புரியும். $(\overline{A.B})$ எனும் குறியீடு உணர்த்துகிறது.

நினைவில் கொள்க :

$Y = (\overline{A.B})$ என்பதில், *AB* இரண்டிற்கும் சேர்த்து ஒரே ஒரு மேற்கோடு இருப்பதை கவனிக்கவும். AND செயற்பாட்டை முடித்த பின்பு, தலைகீழ் மாற்ற செயல்பாட்டை (NOT) நாம் நிறைவேபற்ற வேண்டும் என்பதே இதன் பொருள். இதை மேலும் புரிந்துகொள்ள பயிற்சி 3ஐ பார்க்கவும். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட உள்ளீடுகள் (A, B, C, D) இருக்கலாம். எனவே எல்லா உள்ளீடுகளும் '1' எனும் போது, NANDன் வெளியீடு Y=0 ஆகும். ஏதேனும் ஒரு உள்ளீடு '0' வாக இருந்தால்கூட, இது Y=1 எனும் வெளியீடு தரும்.

ஒருவரிடம் பத்து உணவுப் பொட்டலங்கள் உள்ளன என வைத்துக் கொள்ளலாம். இதில், ஏதேனும் ஒருசில கெட்டுப் போயிருக்கும் என்பது அவருடைய சந்தேகம். ஒரு நுண்ணுயிரி ஸ்கேனர் கொண்டு ஆய்வகத்தில் இவற்றை ஆராய முடியும். இதில் ஏதாவது ஒன்று கெட்டுப்போயிருந்தால் கூட(O) அதற்கேற்ற எச்சரிக்கை சமிக்ஞை (Signal) $Y = 1$ தர வேண்டும். இந்த சமயத்தில் NAND தர்க்கம் உதவும். உணவுப் பொட்டலங்கள் எல்லாம் நன்றாக

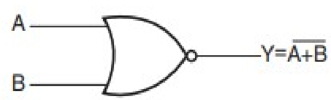
இருந்தால் மட்டுமே எச்சரிக்கை செய்யாது. ஒவ்வொரு முறை அது கெட்டுப்போன பொட்டலத்தை ஸ்கேன் செய்யும் போதும், எச்சரிக்கை தந்து அதனை அகற்ற உதவும்.

3.6.2 NOR வாயில்

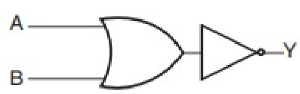
AND வாயிலைத் தொடர்ந்து, ஒரு NOT வாயிலை இணைத்தால், அந்தத் தொகுப்பு NAND வாயில் என அழைக்கப்படுகிறது. அதுபோல, OR வாயிலைத் தொடர்ந்து, ஒரு NOT வாயிலை இணைக்கும் போது நமக்குக் கிடைக்கும் தொகுப்பிற்கு NOR வாயில் என்று பெயர். NOR வாயிலின் தர்க்க விதி

$$\boxed{Y = \overline{A+B}}$$

NOR வாயிலின் தர்க்க குறி இதோ :



(i)



(ii)

குறிப்பு : NOT வாயிலுக்கு பதிலாக வட்டத்தை (Bubble) மட்டுமே பயன்படுத்தி குறி (ii) வரையப்பட்டுள்ளது.

NOR மெய்ப்பட்டியல்

A	*B*	*A+B*	$Y = \overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

- OR வாயிலின் தலைகீழ் செயல்பாடு NOR வாயில். இதை $Y = (\overline{A + B})$ தர்க்கம் உணர்த்துகிறது. (இரண்டுக்கு மேற்பட்ட (A, B, C, D....) உள்ளீடுகளும் இருக்கலாம்) எல்லா உள்ளீடுகளும் '0' எனும்போது மட்டுமே NOR வாயிலின் வெளியீடு '1' ஆகிறது. ஏதேனும் ஒரே ஒரு உள்ளீடு '1' என்றாலும், இது Y = 0 என்ற வெளியீட்டை தரும்.

நினைவில் கொள்க :

$\overline{A+B}$ என்பது இரண்டு கட்ட செயல்பாடு. முதலில் $A+B$ எனும் OR செயல்பாட்டை முடித்த பின்புதான் NOT செயல்பாட்டை நிறைவேற்ற வேண்டும். இதைத்தான் அந்த ஒற்றை மேற்கோடு குறிக்கிறது. மேற்கோடு வரையும்போது கவனம் தேவை. அடுத்த பாடத்தில் $\overline{A}+\overline{B}$ என்பதைப் பற்றி படிக்கையில், இதற்கும் $\overline{A+B}$ என்பதற்கும் உள்ள வேறுபாடு புரியும்.

விமானப் பயணத்தின்போது, நம் கைப்பையில் கத்தி, கத்திரிகோல், துப்பாக்கி, பட்டாசு போன்ற பல பொருட்களை எடுத்துச் செல்லக் கூடாது. பாதுகாப்பு கருதி, கைப்பையை சோதனை செய்வார்கள். அனுமதி மறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் பட்டியலில் (வலைதளத்தில் பாருங்கள்) உள்ள பொருள் எதுவும் கைப்பையில் இல்லை ('O') என்பது உறுதியானால் மட்டுமே கைப்பையை எடுத்துச் செல்லாம் என பச்சை விளக்கு எரியும். (Y=1) இது வாயிலுக்கான ஒரு எடுத்துக்காட்டு.

3.6.3 EX-OR (XOR) வாயில்

'Exclusive OR' வாயில் என்பதன் சுருக்கமே EX-OR (XOR). 'சற்றே வேறுபட்ட' OR வாயில் என்பது இதன் பொருள். இதன் பெயர்க் காரணத்தை புரிந்துகொள்ள, இவ்வாயிலின் மெய்ப்பட்டியலை முதலில் பார்ப்பது அவசியம். இரண்டு உள்ளீடுகள் உடைய ஒரு EX-OR வாயிலின் மெய்ப்பட்டியல் இதோ :

EX-OR மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- EX-OR மெய்ப்பட்டியல் என்பது OR வாயிலின் மெய்ப்பட்டியலைப் போல' இருக்கிறது. ஆனால், இவை இரண்டும் ஒன்றல்ல.
- OR வாயிலில், A=B=1 எனும்போது, Y=*1*.
- ஆனால் EX-OR வாயிலில், A=B=1 எனும்போது Y=0
- இதுவே ORக்கும், EX-OR க்கும் உள்ள வேறுபாடு.
- அதாவது EX-OR வாயிலின் 'எல்லா' உள்ளீடுகளும் சமமாக இருக்கையில், (அது '0' வாகவும் இருக்கலாம். அல்லது '1'வும் இருக்கலாம்) அதன் வெளியீடு, '0' ஆகிறது. மெய்ப்பட்டியலின் முதல் வரிசையும் கடைசி வரிசையும் இதை நமக்குக் காட்டுகிறது.
- '0' மற்றும் '1' என இரண்டு வித உள்ளீடுகளும் தரப்படும்போது, EX-OR வாயிலானது ஒரு OR வாயிலைப் போலவே Y=1 எனும் வெளியீட்டை தருகிறது.
- OR வாயிலில் எல்லா உள்ளீடுகளும் '1' எனும்போது, வெளியீடு 1 என்பது நமக்குத் தெரியும்.
- ஆனால் EX-OR வாயிலில், எல்லா உள்ளீடுகளும், ஒரே மதிப்பை பெற்றால். அது '1' ஆக இருந்தாலும் கூட, Y = 0 என்று ஆகிறது. இந்த ஒரே ஒரு செயல்பாட்டில் இவ்வாயில் OR வாயிலிருந்து வேறுபட்டிருப்பதால், இது வேறுபட்ட 'OR' வாயில் எனும் பெயரிட்டு அழைக்கப்படுகிறது.

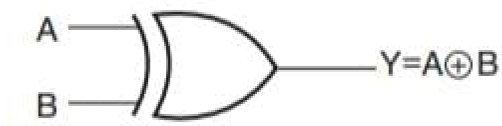
+ எனும் குறி OR தர்க்க செயல்முறையை உணர்த்துகிறது. $\oplus$ என்பது EX-OR தர்க்கத்தை உணர்த்துகிறது.

EX-OR வாயிலின் தர்க்க விதி இதோ :

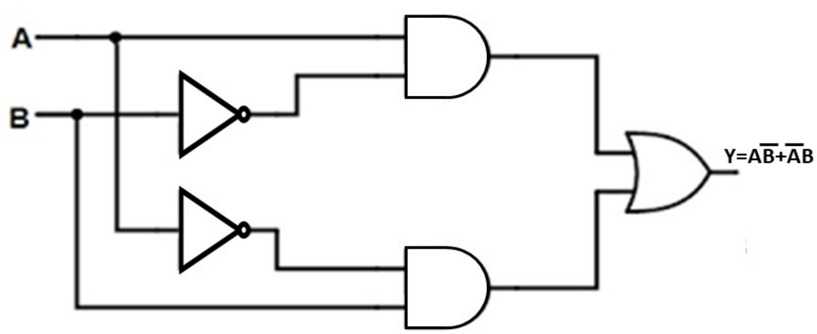
$$\boxed{\begin{array}{l} Y = A \oplus B \\ Y = \overline{A}B + A\overline{B} \end{array}}$$

இதனை "A EX-OR B" என வாசிக்க வேண்டும்.

EX-OR வாயிலின் தர்க்க குறி



EX-OR தர்க்கச் சுற்று : $Y = \overline{A}B + A\overline{B}$ என்பதால், EXOR வாயில் என்பது ஒரு தொகுப்புச் சுற்று. கீழே உள்ள அமைப்பின் மூலம், இந்த தர்க்கத்தை செயல்படுத்த முடியும்.



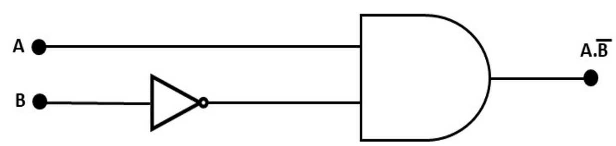
பயிற்சி வினாக்கள்

பயிற்சி 3.1

அடிப்படை தர்க்க வாயில்கள் கொண்டு $Y = A.\overline{B}$ என்பதன் தர்க்கச் சுற்றை வடிவமை. இதன் மெய்ப்பட்டியலை எழுதுக.

விடை

தரப்பட்டுள்ள தர்க்க செயல்பாடு : $Y = A.\overline{B}$ தர்க்கச் சுற்று :



A, B என இரண்டு மாறிகள் $(n = 2)$ இருப்பதால், மெய்ப்பட்டியலில் நான்கு வித (2^2=4; n=2) உள்ளீடுகள் உண்டு.

இதன் மெய்ப்பட்டியல்

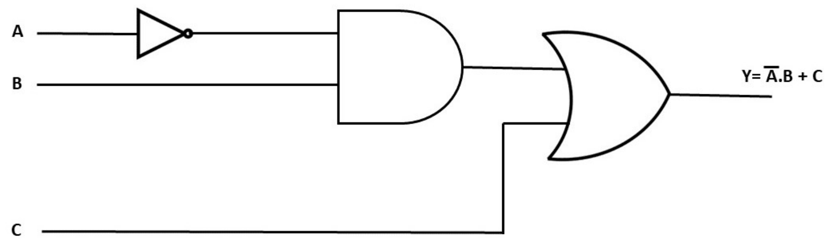
A	B	$\overline{B}$	$Y = A.\overline{B}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

பயிற்சி 3.2

$Y = \overline{A}B + C$ என்பதற்கு மெய்ப்பட்டியல் இடு.

விடை

தரப்பட்டுள்ள தர்க்க செயல்பாடு : $Y = \overline{A}B + C$



இதன் மெய்ப்பட்டியல்

A	$\overline{A}$	B	$\overline{A}B$	C	$Y=\overline{A}B+C$
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1

A, B, C என மூன்று மாறிகள் $(n=3)$ தரப்பட்டுள்ளதால், $(2^n = 2^3 = 8)$ மொத்தம் எட்டுவித உள்ளீடுகள் இதில் உண்டு.

பயிற்சி 3.3

(i) $Y=\overline{A}.\overline{B}$ என்பதற்கும் (ii) $Y=\overline{AB}$ என்பதற்கும் மெய்ப்பட்டியலிட்டு அவற்றின் இடையே வேறுபாட்டை விவரி.

விடை

(i) தரப்பட்டுள்ள தர்க்க செயல்பாடு: $Y=\overline{A}.\overline{B}$

இதில் இரண்டு மாறிகள் $(n=2)$ உள்ளதால், இதன் மெய்ப்பட்டியலில் நான்கு வித $(2^2 = 4)$ உள்ளீடுகள் இருக்கும்.

$Y = \overline{A}.\overline{B}$ என்பதன் மெய்பட்டியல்

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$Y = \overline{A}.\overline{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

(ii) தரப்பட்டுள்ள தர்க்க செயல்பாடு : $Y = \overline{AB}$

இதிலும் இரண்டு மாறிகள் உள்ளன. எனவே, மெய்பட்டியலில் மொத்தம் நான்கு வித உள்ளீடுகள் இருக்கும்.

$Y = \overline{AB}$ என்பதன் மெய்ப்பட்டியல்

A	B	AB	$Y = \overline{AB}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

விவரனை

- $Y = \overline{A}.\overline{B}$ மற்றும் $Y = \overline{AB}$ ஆகியவற்றின் மெய்பட்டியல் மேலே உள்ளன.
- இரண்டிலும், நான்கு வித உள்ளீடுகள் உண்டு.
- இரண்டு மெய்பட்டியலும் தொடர்பற்றவை.
- $Y = \overline{A}.\overline{B}$ என்பதும் $Y = \overline{AB}$ என்பதும் இரு வேறுபட்ட தர்க்க செயல்பாடுகள் என்பது இதிலிருந்து புரிகிறது.

- $Y=\overline{A}.\overline{B}$ என்பது NOR வாயிலுக்குச் சமமானது. $Y=\overline{AB}$ என்பது NAND வாயில்.

- மேற்கோடு வரையும்போது அதிக கவனம் தேவை என்பதை இது தெளிவாக புரிய வைக்கிறது.

- $Y=\overline{A.B}$ என்பதில், A மற்றும் B இரண்டிற்கும் சேர்த்து மேற்கோடு போடப்பட்டுள்ளது. முதலில் AND செயல்பாட்டை செய்து, பின்னர் அதை தலைகீழாக (NOT) மாற்றுகிறோம். அதனால் இது NAND என ஆகிறது. அதாவது, ஒரு AND, அடுத்து ஒரு NOT என இரண்டு செயல்பாடுகள் இங்கே உள்ளன.

- ஆனால், $Y=\overline{A}.\overline{B}$ என்பதில் A மற்றும் B க்கு தனித்தனியே மேற்கோடுகள் போடப்பட்டுள்ளன. எனவே, Aவை தனியாகவும், அடுத்து Bயை தனியாகவும் தலைகீழாக மாற்ற வேண்டும். இதில் இரண்டு தனித்தனி NOT செயல்பாடுகள் உள்ளன. பின்னர் இவற்றை AND வாயிலில் செலுத்த வேண்டும். எனவே மொத்தம் மூன்று செயல்பாடுகள் இதில் உள்ளன. இதிலிருந்து பெறப்படும் வெளியீடு NOR வாயிலை ஒத்துள்ளது. எனவே $\overline{A}.\overline{B}=\overline{A+B}$ என்றும் கூறலாம்.

பயிற்சி 3.4

A = 1101, B = 0110 எனும் இரண்டு உள்ளீடுகளின் அலை வடிவத்தை வரையவும். இவற்றை i) AND மற்றும் ii) OR வாயில்களில் உள்ளீடுகளாகத் தரும்போது, அவற்றிலிருந்து கிடைக்கும் வெளியீட்டு அலை வடிவம் எப்படி இருக்கும் என வரையவும்.

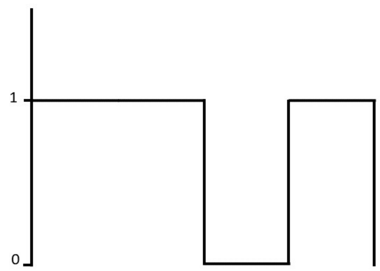
விடை

- படி 1 தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள் :

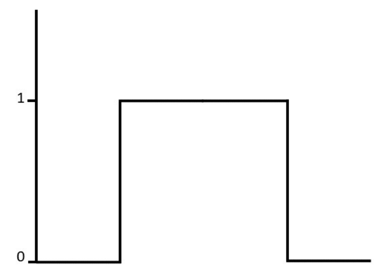
  A = 1101
  B = 0110

- படி 2

இவற்றின் அலை வடிவங்கள்



Aயின் அலைவடிவம் A=1101



Bயின் அலைவடிவம் B=0110

படி 3

AND வெளியீட்டை கண்டுபிடிக்க மெய்ப்பட்டியல் வரையலாம்.

A	B	$Y = A.B$
1	0	0
1	1	1
0	1	0
1	0	0

AND வாயிலுக்கான மெய்ப்பட்டியல்

எனவே, $Y = 0100$ என்பதே விடை :

படி 4

OR வாயில் வெளியீடு காண மெய்ப்பட்டியல் இடலாம்.

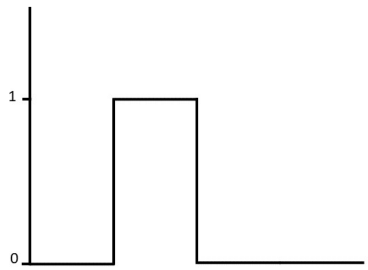
A	B	$Y=A+B$
1	0	1
1	1	1
0	1	1
1	0	1

OR வாயிலுக்கான மெய்ப்பட்டியல்

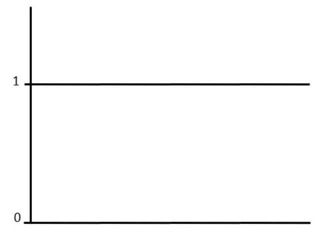
விடைகள்

AND வாயிலின் வெளியீடு : $Y = 0100$

OR வாயிலின் வெளியீடு : $Y = 1111$



AND வாயிலின் வெளியீடு



OR வாயிலின் வெளியீடு

வினாக்கள்

குறுவினாக்கள்

1. அடிப்படை தர்க்க வாயில்கள் எத்தனை?
2. உள்ளீட்டை தலைகீழாக மாற்றும் வாயில் எது?
3. ஒரே ஒரு உள்ளீடு மட்டுமே…………………. வாயிலுக்கு உண்டு.
4. AND வாயிலின் குறியை வரையும்போது, நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டிய ஆங்கில எழுத்து ………………….
5. NOT வாயிலை (சுருக்கமாக) குறிக்க உதவும் ஆங்கில எழுத்து ………………….
6. XOR gate என்பதில் உள்ள ‘X’ எந்த ஆங்கிலச் சொல்லை குறிக்கிறது?

சிறுவினாக்கள்

1. மேற்கோடு இடும்போது கவனம் தேவை – எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்கு
2. EX-OR வாயிலின் பெயர்க் காரணத்தை விளக்குக.
3. NAND வாயிலின் செயல்பாட்டை விளக்கும் ஒரு அன்றாட நிகழ்வை விவரி.
4. ஓட்டலில் தரும் உணவுப் பட்டியல் (MENU CARD எந்த வாயிலின் கீழ் வரும்? விவரி.

நெடுவினாக்கள்

1. மூன்று அடிப்படை தர்க்க வாயில்களின் i) தர்க்க விதி ii) தர்க்க குறி iii) மெய்ப்பட்டியல் ஆகியவற்றைக் கொண்டு அவற்றின் செயல்பாட்டை, தனித்தனியே விவரித்து எழுது. ஒவ்வொன்றிற்கும் அன்றாட நிகழ்வை எடுத்துக்காட்டாகக் கூறி விளக்குக.

2. NAND மற்றும் NOR வாயில்களின் செயல்பாட்டை தகுந்த மெய்ப்பட்டியல், தர்க்க விதி கொண்டு விளக்கவும். இவை ஏன் அடிப்படை வாயில்களாக கருதப்படவில்லை என்பதையும் எழுதுக.

3. EX-OR வாயிலிலிருந்து EX-NOR வாயிலைத் தருவி. கூடவே EX-NOR மெய்ப்பட்டியல், தர்க்க விதி, தர்க்க குறியையும் தெளிவாக எழுதுக. தொகுப்புச் சுற்றை அழகாக வரைந்திடு.

4. $A = 010011$ மற்றும் $B = 101111$ இவற்றை உள்ளீடுகளாகத் தரும்போது. (i) OR (ii) AND (iii) NOR (iv) NAND (v) Ex-NOR வாயில்களின் மூலம் வரும் வெளியீடுகளை தனித்தனியே மெய்ப்பட்டியல் முறையில் கண்டுபிடித்து, அலை வடிவங்களை வரையவும்.

பாடம் 4

பூலியன் இயற் கணிதம்

இப்பாடத்தின் கற்றல் நோக்கங்கள்

- பூலியன் விதிகள், டி மார்கன் தேற்றங்களை பயன்படுத்த பயிற்சிகள் செய்தல்.
- பொதுமை வாயில்கள் பற்றிய புரிதல்
- முதுகலை நுழைவுத் தேர்வுகளில் கேட்கப்பட்டுள்ள பல வினாக்களுக்கு விடை காணுதல்.
- பூலியன் விதிகளை புரிந்துகொள்ளுதல்
- பூலியன் விதிப்படி தர்க்க சுற்றுகளை வடிவமைத்தல்
- பூலியன் விதிகளை பயன்படுத்தி சமன்பாடுகளை சுருக்குதல்

4.1 அறிமுகம்

டிஜிடல் மின்னணு சுற்றுகளை நேர்த்தியாகவும், சுருக்கமாகவும் அமைக்க பூலியன் இயற்கணிதம் வழிகாட்டுகிறது. கணினி நிரல் எழுதவும், மின்னணு பொருட்களை வடிவமைக்கவும் தேவையான அடிப்படை இது என்றுகூட நாம் சொல்லலாம். கார்ணா வரைபடங்கள், டி மார்கன் தேற்றங்கள், க்வின்-மெக்கிளஸ்கி அட்டவணை முறை போன்றவையும் இதன் பகுதிகள். ஜார்ஜ் பூல் எனும் கணிதப் பேராசிரியர் இதனை 1840களில் முன்மொழிந்தார். ஆனால் 'பூலியன் இயற்கணிதம் என்ற பெயர் பின்னாளில்தான் (1913) வந்தது. பல கணித அறிஞர்கள் மூலம் இம்முறை படிப்படியே வளர்ந்து வந்தது. ஜார்ஜ் பூலின் மனைவி மேரி எவரஸட் பூலின் பங்களிப்பும் இதில் உண்டு. நம் நாட்டின் தர்க்க சாத்திரம் மற்றும் பழங்கால இயற்கணித முறையின் தாக்கமும் இதில் பெருமளவு இருப்பதை காணலாம். கணினித் துறையின் முன்னோடிகளுள் ஒருவரான க்ளாட் ஷேனன் அவர்கள்,

டிஜிடல் சுற்றுகளை வடிவமைக்க இம்முறை உதவும் என நிருவிய பின், பூலியன் இயற்கணித முறை அதிகம் பிரபலமானது. இப்பாடத்தில், இதன் விதிகளை பயன்படுத்தி தர்க்க சுற்றுகள் அமைக்கப் போகிறோம்.

4.2 பூலியன் விதிகள்

இயற்கணிதத்தில் உள்ள விதிகளைப் போன்றவை இதிலும் உண்டு.

- இடமாற்ற விதி (Commutative Law)
- தொடர் விதி (Associative Law)
- பகிர்வு விதி (Distributive Law)

இது தொடர்பான மேலும் பல கோட்பாடுகள் உள்ளன. அவற்றுள் முக்கியமான சில :

- இரட்டை நிலை கோட்பாடு (Duality principle)
- டி மார்கன் தேற்றங்கள் (De Morgan theories)
- தானே தனக்கான மாற்றியாக இருப்பது (Involution)
- உள்ளீடும் வெளியீடும் சமமாய் இருத்தல் (Idempotent)
- உள்வாங்கு விதிகள் (Laws of absorption)

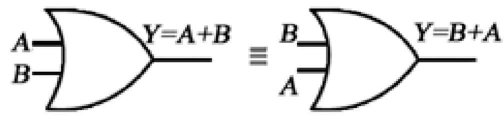
4.2.1 இடமாற்ற விதி (Commutative Law)

இரண்டு எண்களைக் கூட்டும்போது, அவற்றின் இடத்தை மாற்றினால் விடை மாறாது என்பது நமக்குத் தெரியும், $5+3=\ \ 3+5=8$. இதுவே இயற்கணிதத்தில் இடமாற்ற விதி.

அதேபோல, OR வாயிலில் உள்ள இரண்டு உள்ளீடுகளின் இடத்தை மாற்றினால், அதன் வெளியீடு மாறாது. அதாவது,

$$A+B = B+A \qquad \text{--- (4.1a)}$$

இதனை படம் 4.1 நமக்கு விளக்குகிறது.

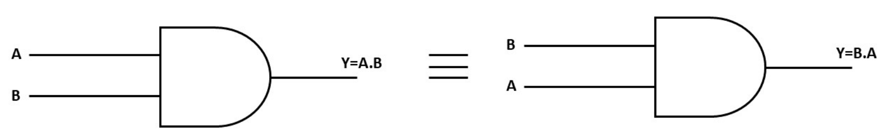


படம் **4.1**

எண்களை பெருக்கும்போதும், இந்த இடமாற்ற விதி பொருந்தும் $5\times3= \ 3\times5=15$ என்பது போல, AND வாயிலின் இரண்டு உள்ளீடுகளை இடம் மாற்றினால், வெளியீடு மாறாது. எந்த வரிசையில் இவை இருந்தாலும் விடை ஒன்றுதான். அதாவது,

$$A.B = B.A \qquad \text{…. (4.1b)}$$

படம் 4.2 இதை தர்க்க குறி மூலம் காண்பிக்கிறது.



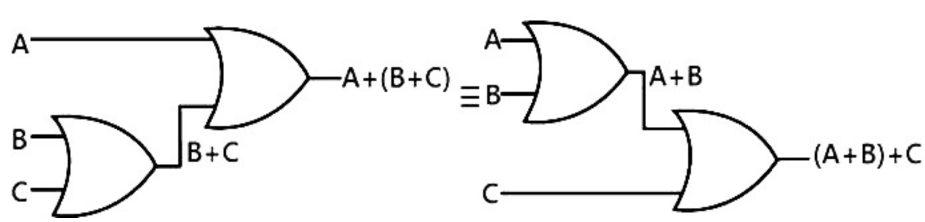
படம் **4.2**

4.2.2 தொடர் விதி (Associative Law)

மூன்று மாறிகளுக்கான *(A, B, C)* தொடர் விதியை OR வாயிலுக்கு இப்போது பார்க்கலாம்.

$$A+ (B+C) \ = (A+B)+C \qquad \text{………. (4.2a)}$$

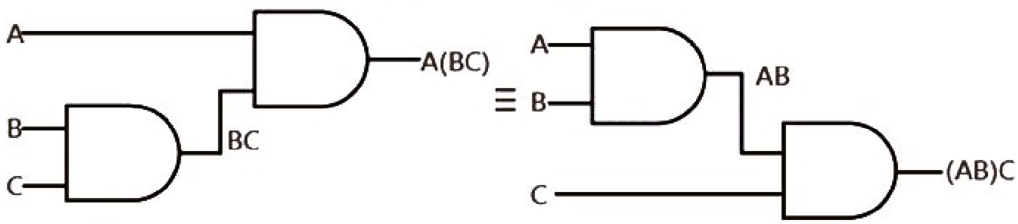
மாறிகளை எந்த வரிசையில் மாற்றி அமைத்தாலும், அத்தொடரின் வெளியீடு மாறாமல் இருக்கும்.



படம் **4.3**

இதேபோன்று, AND வாயிலுக்கும் தொடர் விதியை எழுதமுடியும். AND வாயிலின் தொடர்விதி இதோ.

$$A.(B.C) = (A.B).C \qquad \text{…. (4.2b)}$$



படம் 4.4

மேலே உள்ள படம் 4.4 AND வாயிலின் தொடர்விதியை காட்டுகிறது.

4.2.3 பகிர்வு விதிகள் (Distributive Laws)

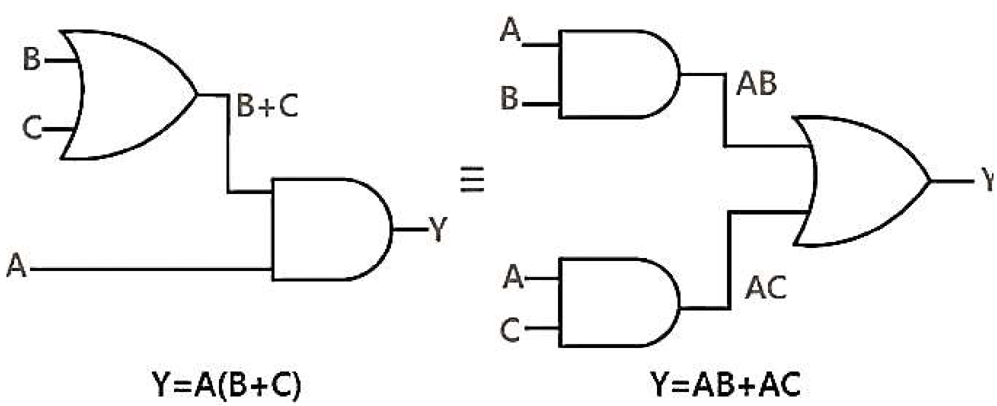
ஒரு தர்க்க செயல்பாட்டை எவ்வாறு விரித்து எழுதலாம் (சுருக்கியும் எழுதலாம்) என்பதை இவை உணர்த்தும்.

மூன்று மாறிகள் கொண்ட பகிர்வு விதியை இவ்வாறு எழுதமுடியும்.

$$A.(B+C) = A.B + A.C \qquad \text{- (4.3)}$$

$$A + (B.C) = (A+B).(A+C) \qquad \text{- (4.4)}$$

இது மிக முக்கியமான ஒரு விதி.



படம் 4.5

ஓர் பார்வை

விதிகள்	AND	OR
இடமாற்ற விதி	$A.B = B.A$	$A + B = B + A$
தொடர் விதி	$A.(B.C) = (A.B).C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
பகிர்வு விதி	$A.(B + C) = A.B + A.C$	$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$

4.3 மேலும் சில முக்கிய பூலியன் நிபந்தனைகள்

அடுத்து நாம் ஒருசில முக்கிய பூலியன் நிபந்தனைகளை நிரூபனத்துடன் பார்க்கப்போகிறோம். இவை, பூலியன் இயற்கணிதத்திற்கு பொருந்து ்; சாதாரணமாக நாம் படிக்கும் எண் சார்ந்த இயற்கணிதத்திற்கு பொருந்தாது.

விதிகள்	OR வாயிலுக்கு (a)	AND வாயிலுக்கு (b)
1.	$A + 0 = A$	$A.0 = 0$
2.	$A + 1 = 1$	$A.1 = A$
3.	$A + A = A$	$A.A = A$
4.	$A + \overline{A} = 1$	$A.\overline{A} = 0$
5.	$\overline{\overline{A}} = A$	
6.	$A + AB = A$	$A(A + B) = A$
7.	$A + \overline{A}B = AB$	$A.(\overline{A} + B) = AB$

4.3.1 நிபந்தனைகளும் நிரூபணங்களும்

(i) $A + 0 = A$

$A = 0$ எனில், $A + 0 = 0 + 0 = 0$

$A = 1$ எனில், $A + 0 = 1 + 0 = 1$

எனவே, $A + 0 = A$ என்பது உறுதி

(ii) $A.0 = 0$

$A = 0$ எனில், $A.0 = 0.0 = 0$

$A = 1$ எனில், $A.0 = 1.0 = 0$

அதாவது AND வாயிலில், ஒரு உள்ளீடு ‘0’ என்று ஆனால், வெளியீடு 0 ஆகிவிடும்.

(iii) $A + 1 = 1$

$A = 0$ எனில், $A + 1 = 0 + 1 = 1$

$A = 1$ எனில், $A + 1 = 1 + 1 = 1$

எனவே, $A + 1 = 1$ என்பது உறுதி. அதாவது. OR வாயில் 1 எனும் உள்ளீட்டோடு எதை தந்தாலும், வெளியீடு =1 ஆகிறது.

(iv) $A.1 = A$

$A = 0$ எனில், $A.1 = 0.1 = 0$

$A = 1$ எனில், $A.1 = 1.1 = 1$

எனவே, $A.1 = A$ என்பது உறுதி

(iv) $A + A = 0$

$A = 0$ எனில், $A + A = 0 + 0 = 0$ ஆகும்.

$A = 1$ எனில், $A + A = 1 + 1 = 1$ ஆகும்.

எனவே $A + A = A$ என்பது உறுதி.

அதனால், OR வாயிலில் எல்லா உள்ளீடுகளும் சமமாக இருந்தால் உள்ளீடும் வெளியீடும் சமமாக இருக்கும்.

(vi) $A.A = A$

$A = 0$ எனில், $A.A = 0.0 = 0$ என்றும்,

$A = 1$ எனில், $A.A = 1.1 = 1$ ஆகிறது.

எனவே AND வாயிலில் எல்லா உள்ளீடுகளும் சமமாக இருக்கும் போது, அதுவே வெளியீடாகவும் இருக்கிறது. OR வாயிலிலும் இதுவே விதி.

உள்ளீடும் வெளியீடும் சமமாக இருக்கும் விதி என v), vi) ஆகிய இரு விதிகளும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஆங்கிலத்தில் Idempotent laws என இவற்றிக்குப் பெயர்.

(vii) $A+\overline{A}=1$

$A=0$ எனில், $\overline{A}=\overline{0}=1$. எனவே, $A+\overline{A}=0+1=1$ ஆகிறது.

ஒருவேளை, $A=1$ எனில், $\overline{A}=\overline{1}=0$. எனவே, $A+\overline{A}=1+0=1$ ஆகிறது.

இதனால் $A+\overline{A}=1$ என்பது உறுதி.

(viii) $A.\overline{A}=0$

$A=0$ எனில், $\overline{A}=1$ அதனால், $A.\overline{A}=0.1=0$.

$A=1$ எனில், $\overline{A}=0$. அதனால், $A.\overline{A}=1.0=0$ ஆகும்.

எனவே, $A.\overline{A}=0$ என்பது உறுதி

(ix) $\overline{\overline{A}}=A$

$A=0$ எனில் $\overline{A}=1$, எனவே $\overline{\overline{A}}=\overline{1}=0$

$A=1$ எனில், $\overline{A}=0$ எனவே, $\overline{\overline{A}}=\overline{0}=1$.

உள்ளீட்டை இரண்டு முறை தலைகீழாக புரட்டினால் கிடைக்கும் வெளியீடானது உள்ளீட்டுக்குச் சமம் என்பதை சொல்லும் விதி இது. ‘தானே’ தனக்கான மாறியாக இருக்கும் பண்பை இங்கு காண்கிறோம். ஆங்கிலத்தில் இது INVOLUTION என்று அழைக்கப்படும். NOT தர்க்க செயல்பாடு ‘தனக்கான மாற்றி’யாக செயல்படுகிறதை இங்கு காண்கிறோம்.

4.3.2. இரட்டைநிலை கோட்பாடு ***(Duality principle or theorem)***

4.3.1ல் நாம் பார்த்த (i) முதல் (viii) வரையிலான பூலியன் நிபந்தனைகளை இங்கே பட்டியலிடலாம்.

வரிசை எண்	OR	AND
i)	$A+0=A$	$A.1=A$
ii)	$A+1=1$	$A.0=0$
iii)	$A+A=A$	$A.A={}^{o}A$
iv)	$A+\overline{A}=1$	$A.\overline{A}=0$

மேலே தரப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளில் ஒரு பண்பை நாம் கவனிக்கலாம். இதில் உள்ள OR வாயிலுக்கான நிபந்தனைகளில் இருக்கும் '+' குறியை '.' எனவும் '0' என்பதை '1' ஆகவும், '1' ஐ '0' ஆகவும் மாற்றினால், நமக்கு AND வாயிலுக்கான நிபந்தனைகள் கிடைக்கும். அதுபோலவே, AND நிபந்தனைகளை OR நிபந்தனைகளாக மாற்றவும் முடியும். எடுத்துக்காட்டுகள் இரண்டின் மூலம் இது மேலும் தெளிவாகும்.

$A+0=A$ என்பதில் உள்ள '+' யும் '0'யும் மாற்றும்போது, நமக்கு $A.1=A$ கிடைக்கிறது. அதாவது OR நிபந்தனையானது அதன் இரட்டையான AND நிபந்தனைக்கு ஈடாக மாறியுள்ளது.

அதுபோலவே, AND நிபந்தனையான $A.\overline{A}=0$ என்பதை மாற்றியமைக்கும் போது, இது $A+\overline{A}=1$ எனும் OR நிபந்தனையாக மாறுவதை கண்கூடாகப் பார்க்கலாம்.

ஒரு சில பூலியன் நிபந்தனைகளில் உள்ள இந்தப் பண்பு 'இரட்டை நிலை' (Duality principle theorem) என அழைக்கப்படுகிறது. இந்த ஒரு சில நிபந்தனைகளில் மட்டும் OR வாயில் செயற்பாடுகளும் AND வாயில் செயற்பாடுகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று 'இரட்டை'யாக இருக்கின்றன.

இவ்வாறு இரட்டை நிலையை வெளிப்படுத்தும் மேலும் சில பூலியன் நிபந்தனைகளை பார்க்கலாம்.

4.4 இரு மாறிகள் உடைய பூலியன் நிபந்தனைகள் சில

நாம் இப்போது பார்க்கப்போகும் நிபந்தனைகளில் இரண்டு மாறிகள் (A, B) இருப்பதால், மெய்ப்பட்டியலிட்டும் இவற்றை நிரூபிக்கலாம்.

(i) $A + AB = A$

மெய்ப்பட்டியல் முறையில் நிறுவுதல்

A	B	AB	$A+AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

மெய்ப்பட்டியலில் உள்ள முதல் மற்றும் நான்காம் நெடுவரிசைகளில் உள்ள மதிப்புகள் ஒன்றாக உள்ளன. எனவே, $A + AB = A$ என்பது உறுதி.

பூலியன் விதிமுறையில் நிறுவுதல்

LHS : $A + AB$

$= A.1 + AB$ $(\because A.1 = A)$

$= A.(1 + B)$ (பகிர்வு விதிப்படி)

$= A.1$ $(1 + B = 1)$

$= A$

LHS = RHS

எனவே $A + AB = A$ என்பது உறுதி

ii) $A.(A + B) = A$

மெய்ப்பட்டியில் முறையில் நிறுவுதல்.

A	B	$A+B$	$A.(A+B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

மெய்பட்டியலில் உள்ள மதிப்புகளை ஒப்பிடுகையில், $A.(A+B)=A$ என்பது நிரூபனம் ஆகிறது.

பூலியன் விதிமுறைப்படி நிறுவுதல்

LHS : $A.(A+B)$

$= A.A + A.B$ (பகிர்வு விதிப்படி)

$= A + AB$ ($\because A.A = A$)

$= A(1+B)$ (பகிர்வு விதிப்படி)

$= A.1$ ($1+B=1$)

$= A$

எனவே, $A.(A+B)=A$ என்பது உறுதி.

- இரண்டு மாறிகள் (A,B) உள்ள தர்க்க சமன்பாடுகளை, ஒரு மாறிக்கு (A) சமமாக மாற்றுகிறது இந்த விதி. இதுபோலவே 4.4(i)ம் விதியும் ஒரு மாறியை உள்வாங்கிக் கொண்டு, மொத்த மாறிகளின் எண்ணிக்கையை குறைக்கிறது. எனவே இந்த இரண்டும் 'உள்வாங்கு விதிகள்' (Laws of absorption) என அழைக்கப்படுகின்றன. மாறிகளின் எண்ணிகையை ஏன் குறைக்க வேண்டும், அதனால் கிடைக்கும் பயன்கள் என்ன என்பதை பின்னர் பார்க்கப் போகிறோம்.

(iii) $A+\overline{A}B = A+B$

மெய்பாட்டியல் முறையில் நிறுவுதல்

A	$\overline{A}$	B	$\overline{A}B$	$A+\overline{A}B$	$A+B$
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1

மெய்பட்டியலின் நெடுவரிசைகளை ஒப்பிடுகையில் $A+\overline{A}B=A+B$ என்பது உறுதி.

பூலியன் விதிமுறைகள்படி நிறுவுதல்:

LHS : $A+\overline{A}B$

$= A.1+\overline{A}.B$ $(A.1=A)$

$= A.(1+B)+\overline{A}B$ $(1+B=1)$

$= A.1+AB+\overline{A}B$ (பகிர்வு விதிப்படி)

$= A+B(A+\overline{A})$ $(A.1=A$ & பகிர்வு விதி$)$

$= A+B.1$ $(A+\overline{A}=1)$

$= A+B$ $(1.B=1)$

எனவே, $A+\overline{A}B=A+B$ என்பது உறுதி.

iv) $A(\overline{A}+B)=A.B$ மெய்ப்பட்டியல் மூலம் நிறுவுதல்

A	$\overline{A}$	B	$\overline{A}+B$	$A(\overline{A}+B)$	$A.B$
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1

மெய்ப்பட்டியலில் உள்ள மதிப்புகளைக் காண்கையில், நமக்கு $A(\overline{A}=B)=A.B$ என்பது உறுதியாகிறது.

பூலியன் விதிமுறைப்படி நிறுவுதல்

LHS : $A.(\overline{A}+B)$

$= A.\overline{A}+AB$ (பகிர்வு விதிப்படி)

$= 0+AB$ $(\because A\overline{A}=0)$

$= AB$

எனவே, $A(\overline{A}+B)=AB$ என்பது உறுதி.

மேலே நாம் (4.4)ல் பார்த்த தர்க்க செயல்விதிகளில் (i) மற்றும் (ii) ஒன்றுக்கு ஒன்று இரட்டையாக இருப்பது கண்கூடாக தெரிகிறது. அதுபோல, (iii) மற்றும் (iv) செயல் விதிகள் மற்றொரு இரட்டையர்களாக உள்ளன.

4.5 டி மார்கன் தேற்றங்கள் (De Morgan's Theorems)

தர்க்க இயற்கணிதத்தில் நாம் பின்பற்றும் இன்றியமையாத தேற்றங்கள் டி மார்கன் தந்தவை.

(i) தேற்றம் 1

$$\boxed{\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}}$$

மெய்பட்டியல் முறையில் நிரூபணம்

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AB	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

மெய்பட்டியலின் கடைசி இரண்டு நெடுவரிசையில் உள்ள மதிப்புகளை ஒப்பிட்டு நோக்கும்போது, $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$ என்பது உறுதியாகிறது.

பூலியன் விதிமுறைப்படி நிறுவுதல்

(a) A = 0 ; B = 0 எனக் கொள்ளலாம்.
LHS : $\overline{A.B} = \overline{0.0} = \overline{0} = 1$
RHS : $\overline{A} + \overline{B} = \overline{0} + \overline{0} = 1 + 1 = 1$

(b) A = 0 ; B = 1 எனக் கொள்ளலாம்.
LHS : $\overline{A.B} = \overline{0.1} = \overline{0} = 1$
RHS : $\overline{A} + \overline{B} = \overline{0} + \overline{1} = 1 + 0 = 1$

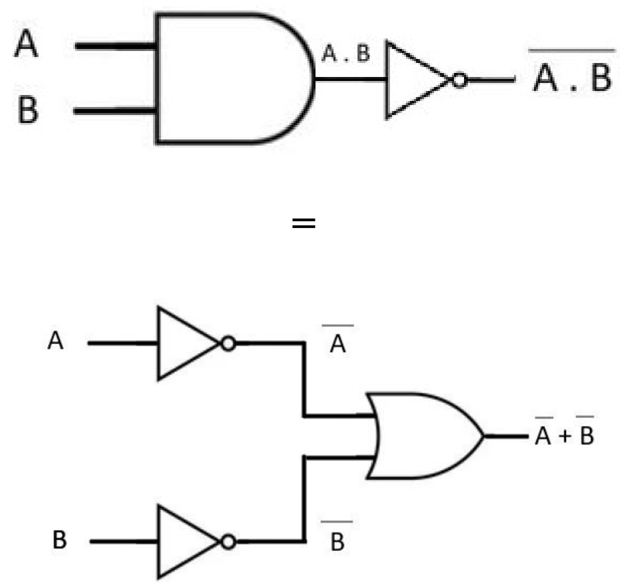
(c) A = 1 ; B = 0 எனக் கொள்ளலாம்.
LHS : $\overline{A.B} = \overline{1.0} = \overline{0} = 1$
RHS : $\overline{A} + \overline{B} = \overline{1} + \overline{0} = 0 + 1 = 1$

(d) A = 1 ; B = 1 எனக் கொள்ளலாம்.

LHS : $\overline{A.B} = \overline{1.1} = \overline{1} = 0$

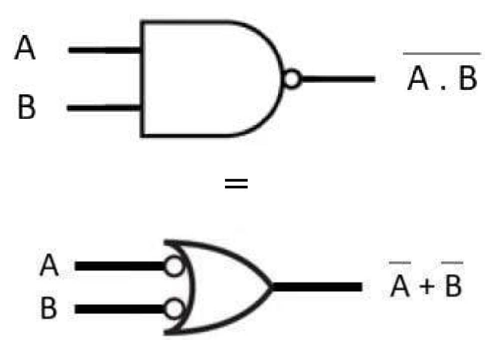
RHS : $\overline{A} + \overline{B} = \overline{1} + \overline{1} = 0 + 0 = 0$

இந்த முறையின் வழியாகவும் $\overline{A.B}$ எனும் தர்க்க செயல்பாடும் $\overline{A} + \overline{B}$ என்பதும் சமம் என்பது உறுதியாகிவிட்டது.



படம் 4.6

தர்க்கச் சுற்றுகள் மூலம் இதனைக் கீழே உள்ள வகையில் வரையலாம். இவற்றில் NOT வாயிலுக்கு பதிலாக ‘O’ குறி பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளதை கவனியுங்கள்.



படம் 4.7

ii) தேற்றம் 2

$$\boxed{\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}}$$

மெய்ப்பட்டியல் முறையில் நிறுவுதல்

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

மெய்ப்பட்டியலில் காணப்படும் கடைசி இரண்டு நெடுவரிசையில் உள்ள மதிப்புகளை ஒப்பிடும்போது, $\boxed{\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}}$ எனும் தர்க்க சமன்பாடு நிரூபனம் ஆகிறது.

பூலியன் விதிமுறைப்படி நிறுவுதல்

(a) A = 0 ; B = 0 எனக் கொள்ளலாம்.

LHS : $\overline{A+B} = \overline{0+0} = \overline{0} = 1$

RHS : $\overline{A}.\overline{B} = \overline{0}.\overline{0} = 1.1 = 1$

(b) A = 0 ; B = 1 எனக் கொள்ளலாம்.

LHS : $\overline{A+B} = \overline{0+1} = \overline{0} = 1$

RHS : $\overline{A}.\overline{B} = \overline{0}.\overline{1} = 1.0 = 1$

(c) A = 1 ; B = 0 எனக் கொள்ளலாம்.

LHS : $\overline{A+B} = \overline{1+0} = \overline{0} = 1$

RHS : $\overline{A}.\overline{B} = \overline{1}.\overline{0} = 0.1 = 1$

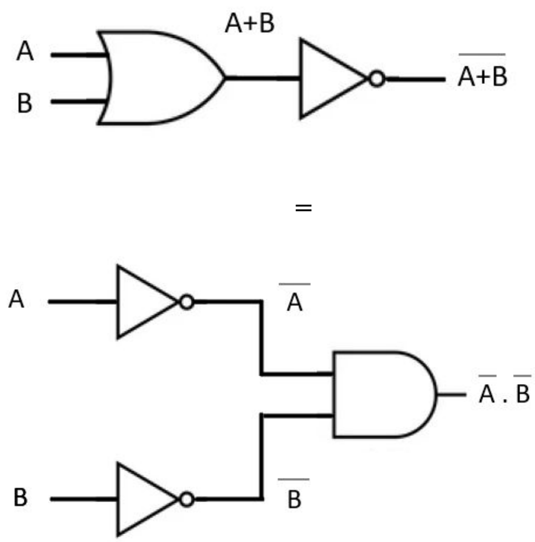
(d) A = 1 ; B = 1 எனக் கொள்ளலாம்.

LHS : $\overline{A+B} = \overline{1+1} = \bar{1} = 0$

RHS : $\bar{A}.\bar{B} = \bar{1}.\bar{1} = 0.0 = 0$

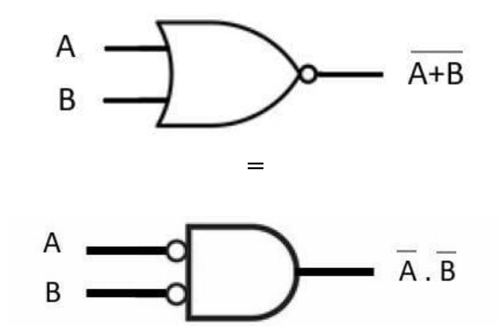
இவ்வாறு, இரண்டாவது வழிமுறையிலும் டி மார்கனின் $\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$ எனும் தேற்றம் உறுதி செய்யப்படுகிறது.

இச்செயல்பாடுகளை தர்க்கக் குறிகள் மூலம் வரையலாம்.



படம் 4.8

NOT வாயிலை 'O' எனக் குறித்து, கீழே உள்ள விதத்திலும் இவற்றை வரையலாம்.



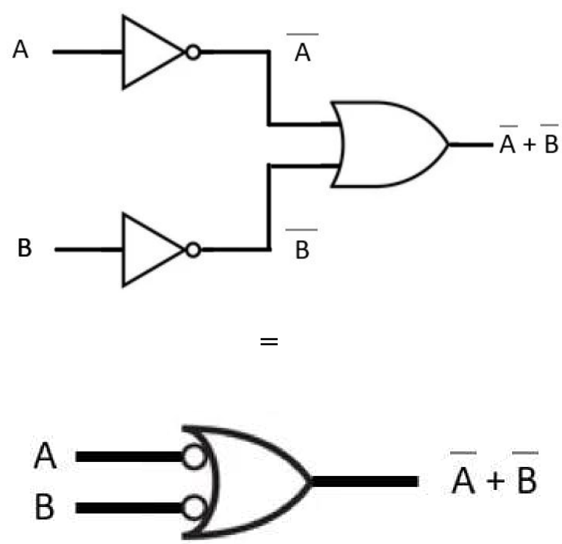
படம் 4.9

4.6 வட்டமிடப்பட்ட வாயில்கள்

டி மார்கன் தேற்றத்தை தர்க்கச் சுற்றுகளாக வரையும் போது NOT வாயில்களை தொடரும் OR (மற்றும் AND வாயில்களை) வரைகிறோம். இது $\overline{A}+\overline{B}$ (மற்றும் $\overline{A}.\overline{B}$) என்பனவற்றை செயல்படுத்தும் வாயில்கள் தொகுப்பாகும். இந்த இரண்டு தொகுப்புகளை பற்றி விரிவாகப் பார்க்கலாம்.

(i) வட்டமிடப்பட்ட OR வாயில்

$Y=\overline{A}+\overline{B}$ எனும் தர்க்க செயல்பாட்டை நிகழ்த்த $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ ஆகியவற்றை ஒரு OR வாயிலின் உள்ளீடாகத் தரவேண்டும் அதாவது, மூன்று தர்க்க வாயில்களின் தொகுப்பு இது. இத்தொகுப்பை



படம் 4.10

இவ்வாறு வரையலாம். இதில் NOT வாயில்களுக்கு பதில் ‘O’ குறி பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

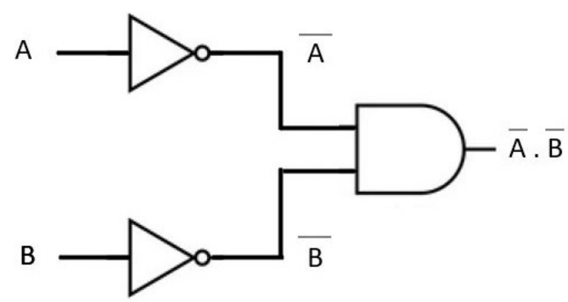
மேலும் $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A.B}$ என்பது டி மார்கன் தேற்றத்தின் மூலம் நமக்குத் தெரியும். எனவே, **வட்டமிடப்பட்ட OR வாயில்** ஒரு **NAND** வாயிலுக்கு **ஒப்பானது** என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

இந்த மெய்ப்பட்டியல் இதோ :

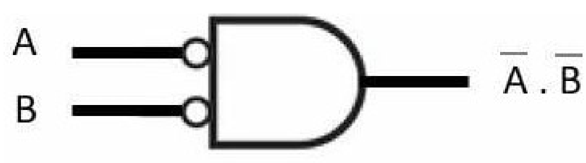
A	B	$Y=\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(ii) வட்டமிடப்பட்ட AND வாயில்

$Y=\overline{A}.\overline{B}$ எனும் தர்க்க செயல்பாட்டை நிகழ்த்த, கீழே வரையப்பட்டுள்ள வாயில்கள் தொகுப்பு உதவும்.



=



படம் 4.11

மேலும், $\overline{A}.\overline{B}=\overline{A+B}$ என்பது டி மார்கன் தேற்றத்திலிருந்து நமக்குத் தெரியும். எனவே, வட்டமிடப்பட்ட AND வாயில் என்பது ஒரு NOR வாயிலுக்கு சமம் என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

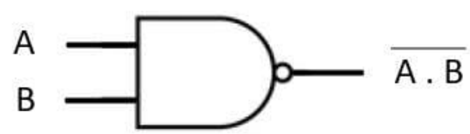
இதன் செயல்பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

A	B	$Y=\overline{A}.\overline{B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4.7 NAND ஒரு பொதுமை வாயில்

அடிப்படை வாயில்களான OR, AND, NOT வாயில்களின் செயல்பாட்டை NAND வாயிலைக் கொண்டே கட்டமைக்க முடியும். இதற்கு ஏற்ற வகையில், NAND வாயில்களை மட்டுமே தொகுத்து, இவற்றை செயல்படுத்த முடியும். இதனால் NAND வாயில் 'பொதுமை வாயில்' அல்லது முழுமையான வாயில் (Universal gate) என அழைக்கப்படுகிறது. முழுமையான கட்டமைப்புத் தொகுதி (Universal building block) என்றும் இதனைக் கூறலாம்.

- NAND வாயில்களை 'மட்டுமே' பயன்படுத்தி பிற வாயில்களின் செயல்பாடுகளை பெறுவது எப்படி எனும் விளக்கத்தை இப்போது பார்க்கலாம்.
- NAND வாயிலின் செயல்பாட்டை முதலில் நினைவுகூறலாம்.
- NAND வாயிலின் தர்க்க விதி : $Y = \overline{A.B}$
- NAND குறி



NAND தர்க்கக் குறி

- மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y = \overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(i) NOT வாயிலாக செயல்படும் NAND

- NOT வாயிலின் தர்க்க விதி $Y = \overline{A}$
- NOT மெய்ப்பட்டியல்

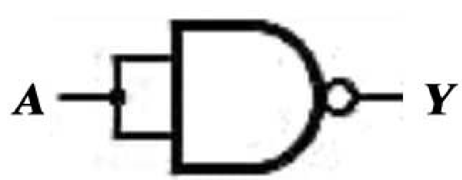
A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

- NOT வாயிலுக்கு ஒரே ஒரு உள்ளீடுதான் (A) உள்ளது. ஆனால் NAND வாயிலுக்கோ A, B என இரண்டு உள்ளீடுகள் உள்ளன. அவற்றை இணைத்தால் A = B என ஒரே உள்ளீடாக மாறும்.
- NAND வாயிலின் தர்க்க விதி : $Y = \overline{A.B}$
- இதில், $A = B$ என ஆகும்போது,

$Y = \overline{A.B} \;\; = \overline{A.A} \;\; = \overline{A}$ $(\because A.A = A)$

இது NOT வாயிலின் தர்க்க விதி என நமக்குத் தெரியும்.

- இவ்வாறு NAND வாயிலின் இரண்டு உள்ளீடுகளையும் ஒன்றாக இணைத்தால், NAND வாயிலானது NOT வாயிலாக செயல்படும்.



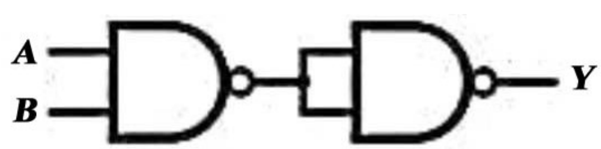
NOT வாயிலாக செயல்படும் NAND

(ii) AND வாயிலாக செயல்படும் NAND

- AND வாயிலின் தர்க்க விதி $Y = A.B$
- ANDன் மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y = A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- NAND வாயில் என்பது AND வாயிலின் தலைகீழ் செயல்பாடு என்பது நமக்குத் தெரியும். எனவே, NAND வாயிலின் வெளியீட்டை தலைகீழாக மாற்றினால் AND செயல்பாடு கிடைக்கும்.
- NAND தர்க்க விதி $Y = \overline{A.B}$ எனவே, $Y = \overline{\overline{A.B}} = A.B$
- NAND வாயில் என்பது ஒரு 'பொது' வாயில் என இங்கே நிறுவப் பார்க்கிறோம். எனவே, NAND மூலமே பிறவற்றை கட்டமைக்க வேண்டும். அதனால் தலைகீழ் மாற்றியாக NOT வாயிலை இங்கு பயன்படுத்தக் கூடாது. அதற்கு பதிலாக, NAND வாயிலின் இரு உள்ளீடுகளை இணைத்து, அதனையே NOT வாயிலாக பயன்படுத்த வேண்டும்.
- AND வாயிலாக செயல்படும் NAND தொகுதி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



AND வாயிலாக செயல்படும் NAND

(iii) OR வாயிலாக செயல்படும் NAND

- OR தர்க்க விதி $Y = A + B$

- OR ன் மெய்பட்டியல்

A	B	$Y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- டி மார்கன் தேற்றப்படி,

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \text{. . . (1)}$$

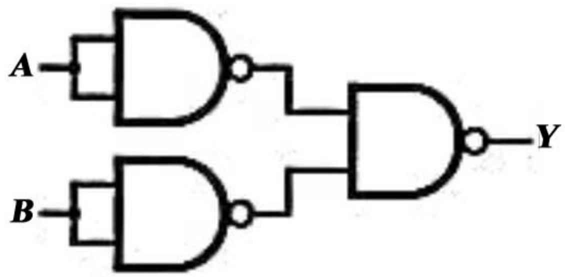
- NAND வாயிலின் உள்ளீடுகள் A மற்றும் B எனும் போது, அதன் வெளியீடு அவற்றின் தலைகீழ் மதிப்பின் OR கூட்டலுக்குச் சமம். அதாவது, $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ ஆகியவற்றின் OR கூட்டல் விடையாக வருகிறது.
- NAND ஒரு வட்டமிடப்பட்ட OR வாயிலுக்கு ஒப்பானது.
- நமக்கு A மற்றும் Bயின் OR கூட்டல் மதிப்பு விடையாகத் தேவை. $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\overline{B}} = B$ என்பதும் நமக்குத் தெரியும். அப்படியானால், உள்ளீடுகளை அதற்கேற்றபடி மாற்றி அமைக்க வேண்டும்.
- அதாவது உள்ளீடுகள் $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ எனக் கொள்ளலாம். மேலும் அவற்றிற்கு X, Y என பெயரிடலாம்.
- எனவே, $X = \overline{A}$; $Y = \overline{B}$. மேலும் டி மார்கன் விதியின்படி

  $\overline{X.Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ என்பதால், $\overline{(\overline{A}).(\overline{B})} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$

இது OR வாயிலின் தர்க்க விதி என்பது நமக்குத் தெரியும்.

- இவ்வாறு, NAND வாயிலின் உள்ளீடுகளை தலைகீழாக மாற்றுவதன் மூலம், அது OR வாயிலாக செயல்படும்.

- தலைகீழ் மாற்றச் செயல்பாட்டிற்கு NAND வாயிலையே பயன்படுத்த வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.
- OR வாயிலாக செயல்படும் NAND தொகுதி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



OR வாயிலாக செயல்படும் NAND

இவ்வாறு NAND வாயில்களைக் கொண்டு AND, OR, NOT ஆகிய அடிப்படை வாயில்களை அமைக்க முடியும். மேலும் இந்தத் தொகுதிகளை பயன்படுத்தி, NOR, X-OR போன்ற பிற வாயில்களையும் கட்டமைக்க முடியும். இதனால் தான், NAND வாயில் ஒரு ‘பொதுமை’ வாயில் அல்லது முழுமையான கட்டமைப்புத் தொகுதி என அழைக்கப்படுகிறது.

4.8 NOR ஒரு பொதுமை வாயில்

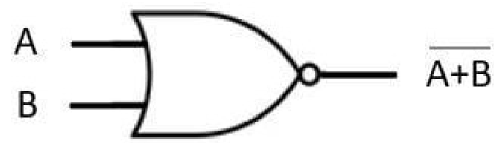
அடிப்படை வாயில்களான OR, AND, NOT ஆகியவற்றின் செயல்பாட்டை ஒரு NOR வாயில் செய்யமுடியும். NAND வாயிலைப் போலவே, செய்ய NOR வாயிலும் ‘பொது’ வாயில் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். NOR வாயிலும் ஒரு முழுமையான கட்டமைக்கும் தொகுதி (Universal building block).

இதனை நிறுவ, கட்டமைக்கும் கூறாக NOR வாயில்களை மட்டுமே பயன்படுத்தி, பிற வாயில்களைப் பெறலாம்.

இதற்கு NOR வாயிலின் செயல்பாட்டை முதலில் பார்கலாம்.

- NOR வாயிலின் தர்க்க விதி $Y = \overline{A+B}$

- NOR குறி



NOR தர்க்கக் குறி

- NOR மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y=\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(i) NOT வாயிலாகும் NOR

- NOT வாயிலின் தர்க்க விதி $Y=\overline{A}$
- NOT வாயிலின் மெய்ப்பட்டியல்

A	$Y=\overline{A}$
0	1
1	0

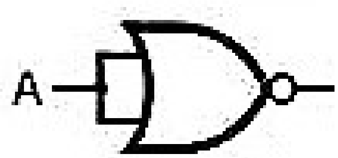
- NOT வாயிலுக்கு ஒரே ஒரு உள்ளீடு (A) மட்டுமே உள்ளது. ஆனால், NOR வாயிலுக்கு இரண்டு உள்ளீடுகள் (A, B) உள்ளன. எனவே, அவற்றை A = B இணைக்க வேண்டும்.

- NOR வாயிலின் தர்க்க விதி $Y=\overline{A+B}$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.
- இதில், $A=B$ என்று ஆகும்போது,

$$\begin{aligned} Y &= \overline{A+B} \\ &= \overline{A+A} \\ &= \overline{A} \qquad\qquad (A+A=A) \end{aligned}$$

இது NOT வாயிலின் தர்க்க விதி.

- இவ்வாறு, NOT வாயிலின் இரண்டு உள்ளீடுகளையும் ஒன்றாக இணைத்தால், அது NOT வாயிலாக செயல்படும்.



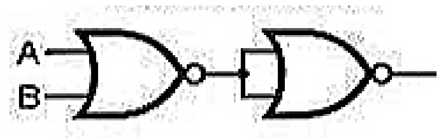
NOT வாயிலாக செயல்படும் NOR

(ii) OR வாயிலாகும் NOR

- OR வாயிலின் தர்க்க விதி $Y = A + B$
- OR வாயிலின் மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- NOR வாயில் என்பது OR வாயிலின் தலைகீழ் செயல்பாடு என்பது தெரியும். எனவே, ஒரு NOR வாயிலை தலைகீழாக மாற்றினால், அது OR ஆகிவிடும். $Y = \overline{\overline{A + B}} = A + B$
- பூலியன் இயற்கணிதத்தில், NOT வாயிலானது தனக்கான மாற்றியாகவும் (Idempotent) செயல்படுகிறது.
- NOR வாயில் முழுமையாக கட்டமைக்கும் வாயில் என இங்கு நிறுவப் பார்க்கிறோம். எனவே, NOR வாயில்களை மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும். எனவே, NOT வாயிலுக்கு பதிலாக, ஒரு NOR வாயிலை NOT வாயிலாக இங்கே செயல்படுத்த வேண்டும்.



OR வாயிலாக செயல்படும் NOR

OR வாயிலாக செயல்படும் NOR தொகுதி மேலே தரப்பட்டுள்ளது.

(iii) AND வாயிலாகும் NOR

- AND வாயிலின் தர்க்க விதி $Y = A.B$
- AND வாயிலின் மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y = A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- டி மார்கன் தேற்றப்படி,

$$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$$

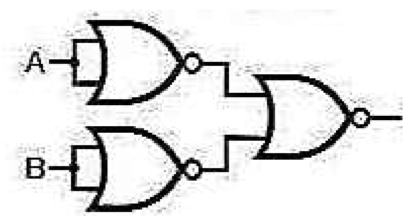
- NOR வாயில் என்பது ஒரு வட்டமிடப்பட்ட AND வாயில் (Bubbled AND gate) என்பதை ஏற்கனவே பார்த்துள்ளோம்.
- NOR வாயில்களை தொகுத்து, AND தர்க்க செயல்பாட்டை செய்ய முனைந்துள்ளோம். அதாவது, A மற்றும் Bயின் AND பெருக்கல் வெளியீடு நமக்குத் தேவை. அதற்கேற்றபடி, NOR வாயிலின் உள்ளீட்டை மாற்றி அமைக்கப் போகிறோம்.
- NOR வாயிலில், A மற்றும் B உள்ளீடானால், அதன் வெளியீடு $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ன் OR கூட்டல் ஆகும். இந்த அடிப்படையில், NOR வாயிலின் உள்ளீட்டை $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ எனத் தந்தால், அதன் வெளியீடு $\overline{\overline{A}} = A$ மற்றும் $\overline{\overline{B}} = B$ என்று மாறும்.

- உள்ளீடுகள் $X = \overline{A}$; $Y = \overline{B}$ எனலாம்

டி மார்கன் விதிப்படி,

$$\overline{X+Y} = \overline{X}.\overline{Y}$$
$$= \left(\overline{\overline{A}}\right).\left(\overline{\overline{B}}\right)$$ என்பதால்,
$$= A.B$$
$$\therefore \overline{\overline{A}+\overline{B}} = A.B$$ என்பது உறுதி

- NOR ஒரு முழுமையான கட்டமைப்புத் தொகுதி என இங்கே நிறுவப் பாரப்பதால், NOT வாயிலாக NOR வாயிலையே பயன்படுத்துவது அவசியம்.
- AND வாயிலாகச் செயல்படும் NOR வாயில் தொகுதி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

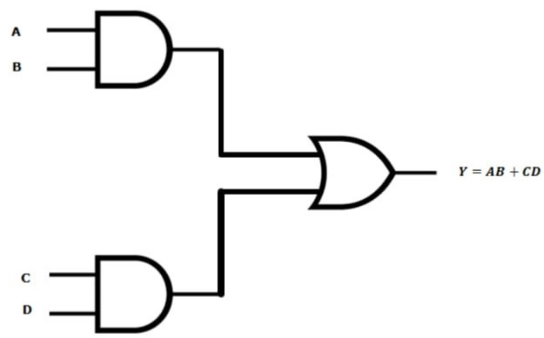


AND வாயிலாகும் NOR

- NOR வாயில்களைக் கொண்டு, இவ்வாறு OR, AND, NOT ஆகிய அடிப்படை வாயில்களை கட்டமைக்க முடியும். மேலும், இத்தொகுதிகளை பயன்படுத்தி, NAND, EX-OR, EX-NOR போன்ற பிற வாயில்களின் தர்க்க செயல்பாடுகளையம் நிறைவேற்ற முடியும். எனவேதான், NOR வாயில் ஒரு முழுமையான கட்டமைப்புத் தொகுதி அல்லது முழுமையான வாயில் என அழைக்கப்படுகிறது.

4.9 AND – OR தொகுப்புக்கு ஒப்பானது NAND – NAND தொகுப்பு

- இதைப் புரிந்துகொள்ள ஒரு AND-OR தொகுப்பை பார்க்கலாம். இதில் OR வாயிலின் உள்ளீடுகளை AND வாயில்கள் வழங்குகின்றன. அதாவது $Y = AB + CD$ என்பது ஒரு AND - OR தொகுப்பு.



AND –OR தொகுப்பு

- எனவே, $\overline{Y} = \overline{AB + CD}$

இதை டி மார்கன் தேற்றப்படி விரிவுபடுத்தி எழுதும்போது.

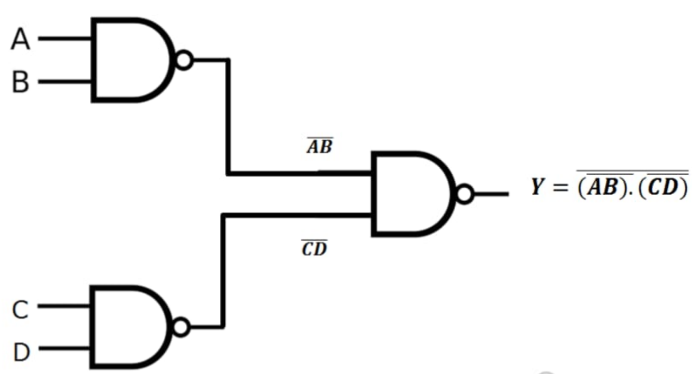
$\overline{Y} = \overline{AB}.\overline{CD}$

$Y = \overline{\overline{Y}}$ என்பதால்,

இங்கு, $Y = \overline{\overline{AB}.\overline{CD}}$ என எழுதலாம்.

மேலே உள்ள சமன்பாடு NAND தர்க்க விதியால் ஆனது. இதை செயல்படுத்த மூன்று NAND வாயில்கள் தேவை.

எனவே, ஒரு AND-OR தொகுதியின் செயல்பாட்டை கீழே உள்ள NAND – NAND தொகுதி கொண்டு செயல்படுத்த முடியும். இவை இரண்டும் ஒப்பாகும்.



AND-OR தொகுப்புக்கு ஈடான ஒரு NAND - NAND தொகுப்பு

இதே போல, OR-AND தொகுப்பிற்கு ஒப்பான NOR-NOR தொகுப்பை வடிவமைத்தல் இயலும்.

பயிற்சி 4.1

$A+\overline{A}.\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$ என்பதை பூலியன் முறைப்படி நிறுவு.

விடை

LHS : $A+\overline{A}.\overline{B}$

$= (A.1)+\overline{A}.\overline{B}$ $\quad (\because 1.A=A)$

$= A(1+\overline{B})+\overline{A}.\overline{B}$ $\quad (\because 1+A=1)$

$= A.1+A\overline{B}+\overline{A}.\overline{B}$ (பகிர்வு விதி)

$= A+(A+\overline{A}).B$ ($1.A=A$ & பகிர்வு விதி)

$= A+\overline{B}.1$ $\quad (A+\overline{A}=1)$

$= A+\overline{B}$

LHS = RHS

$A+\overline{A}.\overline{B}=A+\overline{B}$ என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 4.2

$\overline{A}+AB=\overline{A}+B$ என்பதை நிறுவு.

விடை

LHS : $\overline{A}+AB$

$=\overline{A}.1+AB$ $\quad (1+A=A)$

$=\overline{A}(1+B)+AB$ $\quad (1+A=1)$

$=\overline{A}.1+\overline{A}B+AB$ (பகிர்வு விதி)

$=\overline{A}+B(A+\overline{A})$ ($1.A=A$ & பகிர்வு விதி)

$=\overline{A}+B.1$ $\quad (A+\overline{A}=1)$

$=\overline{A}+B$ $\quad (1.A=A)$

LHS = RHS

எனவே, $\overline{A}+AB=\overline{A}+B$ என்பது உறுதி.

பயிற்சி 4.3

$A+BC=(A+B)(A+C)$ என்பதை நிறுவு.

விடை

RHS : $(A+B)(A+C)$

$=A.A+A.C+B.A+B.C$	(பகிர்வு விதி)
$=A+AC+AB+BC$	($A.A=A$ & இடமாற்ற விதி)
$=A.1+AC+AB+BC$	($1.A=A$)
$=A(1+C+B)+BC$	(பகிர்வு விதி)
$=A.1+BC$	($1+A=A$)
$=A+BC$	($1.A=A$)

LHS = RHS

எனவே $A + BC = (A + B)\ (A + C)$ என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 4.4

$Y=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}B$ என்பதன் மதிப்பை அளவிடுக.

விடை

$$Y=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}B$$

$$=\overline{A}(\overline{B}+B) \qquad \because \overline{B}+B=1$$

$$=\overline{A}.1$$

$$=\overline{A}$$

பயிற்சி 4.5

$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$ என்பதை பூலியன் முறைப்படி நிறுவு. இந்த தர்க்கச் சுற்றுகளுக்குத் தேவையான வாயில்கள் எத்தனை?

விடை

LHS : $AB+\overline{A}C+BC$

$=AB+\overline{A}C+BC.1$ ($1.A=A$)

$= AB + \overline{A}C = BC(A\overline{A})$ $(A + \overline{A} = 1)$

$= AB + \overline{A}C + BCA + BC\overline{A}$ (பகிர்வு விதி)

$= AB + \overline{A}C + BCA + BC\overline{A}$ (இடமாற்ற விதி)

$1.A = A$

$= AB.1 + ABC + \overline{A}C.1 + \overline{A}CB$ (இடமாற்ற விதி)

$= AB(1 + C) + \overline{A}C(1 + B)$ (பகிர்வு விதி)

$= AB.1 + \overline{A}C.1$ $(1 + A = 1)$

$= AB + \overline{A}C$ $(1.A = 1)$

LHS = RHS

$\overline{A}B + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ என நிறுவப்பட்டது. மேலும் $AB + \overline{A}C + BC$ க்குத் தேவையான வாயில்கள் - OR வாயில் : 2, AND : 3 , NOT : 1, மொத்தம் – ஆறு. $AB + \overline{A}C$ க்குத் தேவை - OR – 1, AND : 2, NOT : 1 மொத்தம் – நான்கு

பயிற்சி 4.6

$(A + B)(\overline{A} + C)(B + C) = (A + B)(\overline{A} + C)$ என நிறுவுக. எத்தனை வாயில்கள் தேவை என்பதையும் எழுதுக.

விடை

LHS : $(A + B)(\overline{A} + C)(B + C)$

$= (A\overline{A} + AC + B\overline{A} + BC)(B + C)$ (பகிர்வு விதி)

$= (0 + AC + \overline{A}B + BC)(B + C)$ $(\overline{A} = 0$ & இடமாற்ற விதி)

$= (AC + \overline{A}B + BC)(B + C)$ $(A + 0 = A)$

$= ACB + ACC + \overline{A}BB + \overline{A}BC + BCB + BCC$ (பகிர்வு விதி)

$= ABC + AC + \overline{A}B + \overline{A}BC + BC + BC$ $(A.A = A$ & பகிர்வு விதி)

$= AC(1 + B) + \overline{A}B(1 + C) + BC$ $(A + A = A \& 1.A = A)$

$= AC + \overline{A}B + BC$ $(1 + A = A)$

$= (A + B)C + \overline{A}B$ (பகிர்வு விதி)

$= (A+B)C + \overline{A}B + \overline{A}.A$ $\quad$ $(0 + A = A \ \& \ A.A = 0)$

$= (A+B)C + \overline{A}(B+A)$ $\quad$ (பகிர்வு விதி)

$= (A+B)C + \overline{A}(A+B)$ $\quad$ (இடமாற்ற விதி)

$= (A+B)(\overline{A}+C)$ $\quad$ (பகிர்வு விதி)

எனவே, $(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$ என நிறுவப்பட்டது.

	தர்க்கம்	தேவையான வாயில்கள்	எண்ணிக்கை
(i)	$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)$	OR AND NOT	3 2 1
		மொத்தம்	6
(ii)	$(A+B)(\overline{A}+C)$	OR AND NOT	2 1 1
		மொத்தம்	4

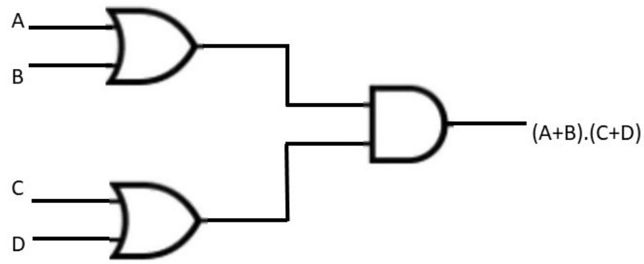
$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)$ எனும் தர்க்கத்துக்குத் தேவையான வாயில்களின் எண்ணிக்கையை விட $(A+B)(\overline{A}+C)$ தர்க்கத்தை செயல்படுத்தத் தேவையான மொத்த வாயில்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருப்பதால், $(A+B)(\overline{A}+C)$ எனும் செயல்பாடு மேம்பட்டது.

பயிற்சி 4.7

OR-AND தொகுப்பிற்கு ஈடான NOR–NOR தொகுப்பு ஒன்றை வடிவமைத்து வரைக.

விடை

- OR-AND தொகுப்பு என்பது இரண்டு OR வாயில்களின் வெளியீடுகளை ஒரு AND வாயிலின் உள்ளீட்டில் தரும் செயல்முறை.

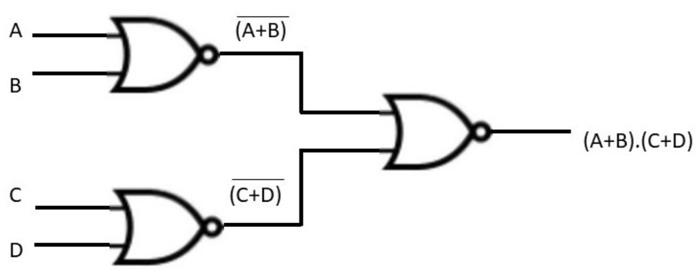


OR-AND தொகுப்பு

- OR-AND தொகுப்பின் வெளியீடு $Y = (A+B).(C+D)$
- எனவே $\overline{Y} = \overline{(A+B).(C+D)}$
- இதனை டி மார்கன் தேற்றப்படி,

  $\overline{Y} = \overline{(A+B)} + \overline{(C+D)}$ என எழுதலாம்
- நமக்கு, $\overline{\overline{Y}} = Y$ என்பது தெரியும். ஆதலால்,

  $\overline{\overline{Y}} = Y = \overline{\overline{(A+B)} + \overline{(C+D)}}$
- மேலே உள்ள சமன்பாடு NOR வாயில்களால் ஆனது.



OR-AND தொகுப்புக்கு ஈடான NOR - NOR தொகுப்பு

இதன் மூலம் OR-AND தொகுப்பிற்கு, NOR-NOR தொகுப்பு ஒப்பானது என்பது நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 4.8

$A+\overline{A}B+\overline{A}.\overline{B}=1$ என்பதை நிறுவு

விடை

LHS : $A+\overline{A}B+\overline{A}.\overline{B}$

$= A+\overline{A}(B+\overline{B})$ (பகிர்வு விதி)

$= A+\overline{A}.1$ $(B+\overline{B}=1)$

$= A+\overline{A}$ $(\overline{A}.1)=\overline{A}$

$=1$

$A+\overline{A}B+\overline{A}.\overline{B}=1$ என்பது நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 4.9 (IIT JAM 2023), (IIT JAM 2007)

என்பதனை குறிக்கும் இணை எது?

(a) NOR, NOR (b) NOR, NAND (c) NAND, NAND (d) OR, NAND

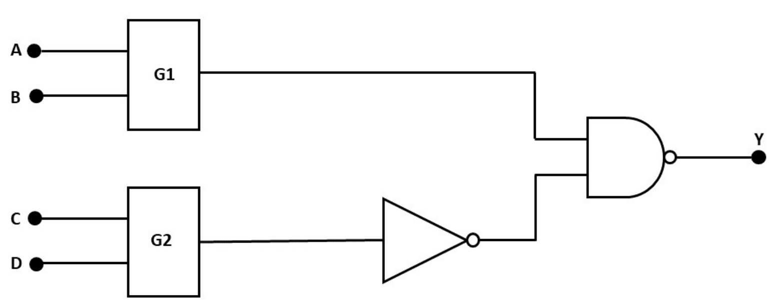
விடை

(i)வது படம் NAND தர்க்கக் குறியீடு

(ii)வது படம் வட்டமிடப்பட்டுள்ள ஒரு OR வாயில். இது NAND வாயிலுக்குச் சமம்.

சரியான விடை : (d)

பயிற்சி 4.10 IIT JAM 2023



மேலே தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் $Y=\overline{A}.\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$ எனில், $G1$ மற்றும் $G2$ வாயில்கள் என்னென்ன?

(a) NAND மற்றும் NOR (b) NOR மற்றும் OR

(c) NOR மற்றும் NAND (d) OR மற்றும் NAND

விடை

- $Y=\overline{A}.\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$ என தரப்பட்டுள்ளது.
- NANDன் உள்ளீடுகளை M,N எனக் கொள்ளலாம்.

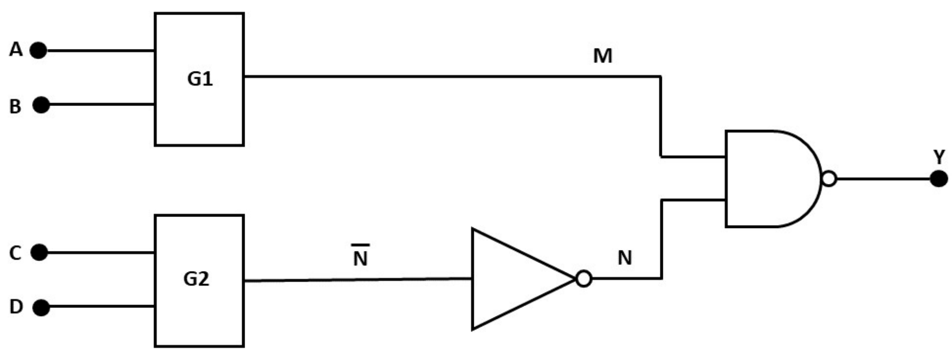
எனில், $Y=\overline{M.N}=\overline{A}.\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$

$\Rightarrow \overline{M}+\overline{N}=\overline{A}.\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$

$=\overline{(A+B)}+\overline{CD}$ (டி மார்கன் விதிப்படி)

எனவே $M=A+B;\ N=CD$

$\overline{N}=\overline{CD}$

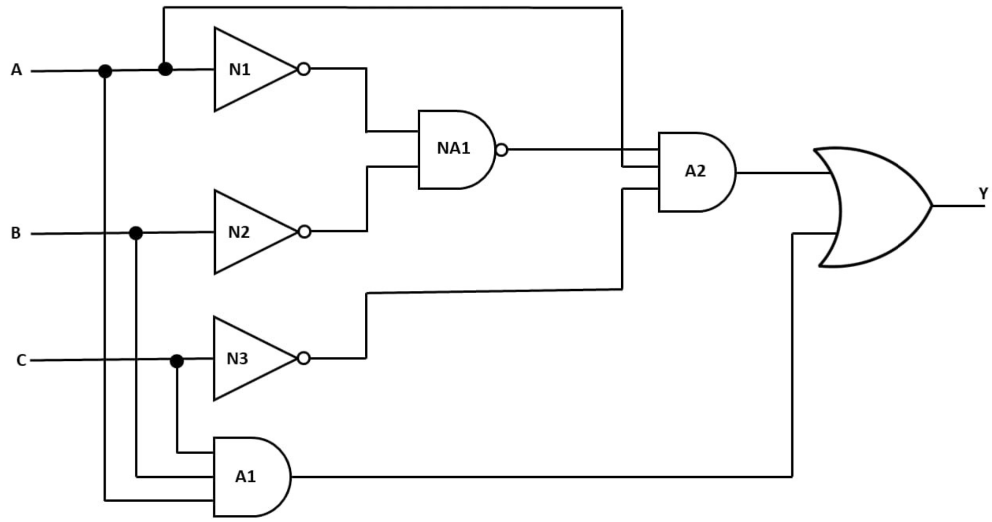


அதனால் $G1$ என்பது OR வாயில்

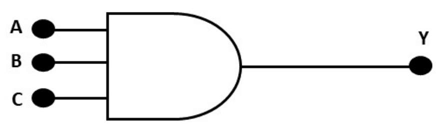
$G2$ என்பது $NAND$ வாயில்

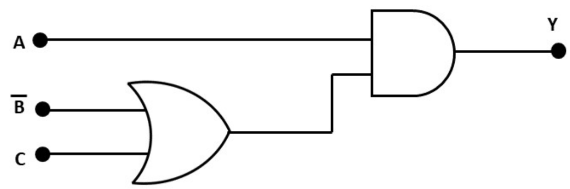
சரியான விடை : (c)

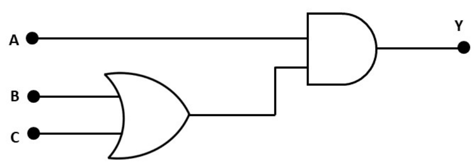
பயிற்சி 4.11

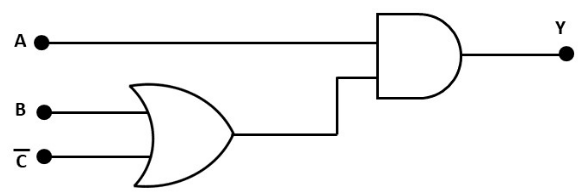


இதற்கு ஒப்பான சுற்று எது?

a)


b)


c)


d)


விடை

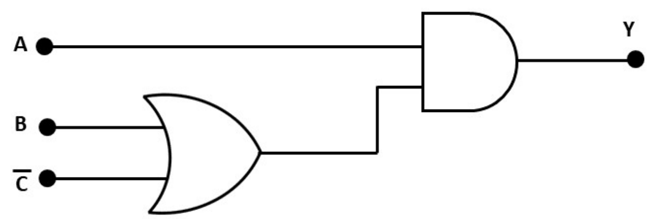
தரப்பட்ட சுற்றில் உள்ள வாயில்களுக்கு பெயர் இடுவதன் மூலம், இதனை தீர்த்தல் சற்று எளிதாகும்.

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
$N1$	A	$\overline{A}$
$N2$	B	$\overline{B}$
$N3$	C	$\overline{C}$
$A1$	A, B, C	$A.B.C$
$NA1$	$\overline{A}, \overline{B}$	$\overline{\overline{A}.\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு	
$A2$	$(A+B), A, \overline{C}$	$(A+B).A.\overline{C}$ $= A.A.\overline{C} + B.A.\overline{C}$ $= A\overline{C} + AB\overline{C}$ $= A\overline{C}(1+B)$ $= A\overline{C}$	$(1 + A = A)$
O	AC, ABC	$ABC + A\overline{C}$ $= A(BC + \overline{C})$ $= A(B + \overline{C})$	$(A + \overline{A}B = +B)$

எனவே $Y = A(B+\overline{C})$ எனத் தெரிகிறது. இதனை பின்வரும் வகையில் செயல்படுத்த முடியும்.

சரியான விடை : (d)



பயிற்சி 4.12 (IIT JAM 2022)

$Y = \overline{PQ}R + Q\overline{R} + \overline{P}QR + PQR$ என்பதன் சுருக்கம் எது?

$(a)\overline{P}R + Q$ $\quad$ $(b)PR + Q$ $\quad$ $(c)P + R$ $\quad$ $(d)Q + R$

விடை

தரப்பட்டுள்ள தர்க்க சமன்பாடு

$Y = \overline{PQ}R + Q\overline{R} + \overline{P}QR + PQR$

$= \overline{PQ}R + Q\overline{R} + (\overline{P} + P)QR$ (பகிர்வு விதி)

$= \overline{PQ}.R + Q\overline{R} + QR$ $(\overline{A} + A = 1 \ \& \ 1.A = A)$

$= (\overline{P} + \overline{Q})R + Q\overline{R} + QR$ (டி மார்கன் தேற்றம்)

$= \overline{P}R + \overline{Q}R + Q\overline{R} + QR$ (பகிர்வு விதி)

$= \overline{P}R + (\overline{Q} + Q)R + Q\overline{R}$ $(A + \overline{A} = 1)$

$= \overline{P}R + R + Q\overline{R}$ $(1.A = A)$

$= R(1 + \overline{P}) + Q\overline{R}$

$= R + Q\overline{R}$ $(1 + A = A)$

$= R + Q$ $(A + \overline{A}B = A + B)$

சரியான விடை : (d)

பயிற்சி 4.13

$\overline{PQ}(\overline{P} + Q)(Q + \overline{Q})$ எனும் சமன்பாடு எதற்குச் சமம்?

$(a)P$ $(b)\overline{P}$ $(c)\overline{P}Q$ $(d)P\overline{Q}$

விடை

தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$Y = \overline{PQ}(\overline{P} + Q)(Q + \overline{Q})$$

$$= \overline{PQ}[\overline{P}Q + \overline{P}.\overline{Q} + |QQ + Q\overline{Q}]$$

$$= \overline{PQ}[\overline{P}Q + \overline{P}.\overline{Q} + Q + 0]$$ $(A.A = 0 \ \& \ A.\overline{A} = 0)$

$$= \overline{PQ}[\overline{P}.\overline{Q} + Q(1 + P)]$$

$$= \overline{PQ}(\overline{P}.\overline{Q} + Q)$$ $[1 + A = 1]$

$$= (\overline{P} + \overline{Q})(\overline{P}.\overline{Q} + Q)$$ (டி மார்கன் தேற்றம்)

$$= \overline{P}.\overline{P}.\overline{Q} + \overline{P}Q + \overline{Q}.\overline{P}.\overline{Q} + \overline{Q}Q$$

$$= \overline{P}.\overline{Q} + \overline{P}Q + \overline{Q}.\overline{P} + O$$ $(A.\overline{A} = 0)$

$$= \overline{P}.\overline{Q} + \overline{P}Q$$

$$= \overline{P}[Q + \overline{Q}]$$ $(A + \overline{A}) = 1$

$$= \overline{P}$$

சரியான விடை : (b)

பயிற்சி 4.14

$Z = PQ + PQR + PQRS + PQRST + PQRSTU$ எனில் $\overline{Z}$ன் மதிப்பைக் காண்க.

$(a)\overline{PQ} + \overline{R}(\overline{S} + \overline{T + U})$ $(b)\overline{P}.\overline{Q}$

$(c)\overline{P} + \overline{Q}$ $(d)\overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} + \overline{S} + \overline{T} + \overline{U}$

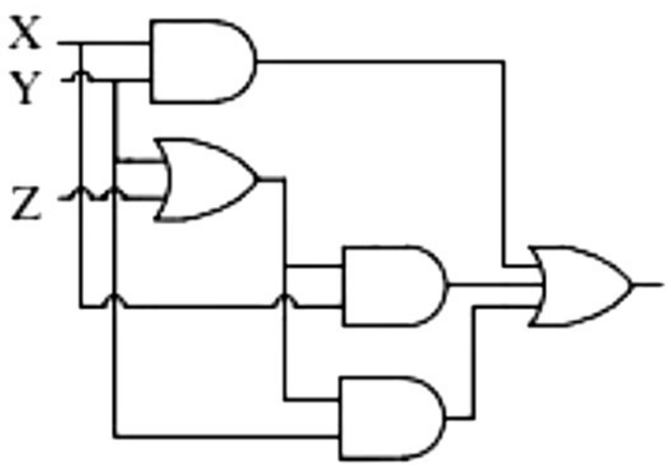
விடை

$$Z = PQ + PQR + PQRS + PQRST + PQRSTU$$
$$= PQ(1 + R(1 + S(1 + T(1 + U))))$$
$$= PQ(1 + R(1 + S(1 + T)))$$
$$= PQ(1 + R(1 + S))$$
$$= PQ(1 + R) \qquad (\because 1 + A = 1)$$
$$= PQ$$

எனில், $\overline{Z} = \overline{PQ} = \overline{P} + \overline{Q}$ (டி மார்கன் தேற்றம்)

சரியான விடை : (c)

பயிற்சி 4.15



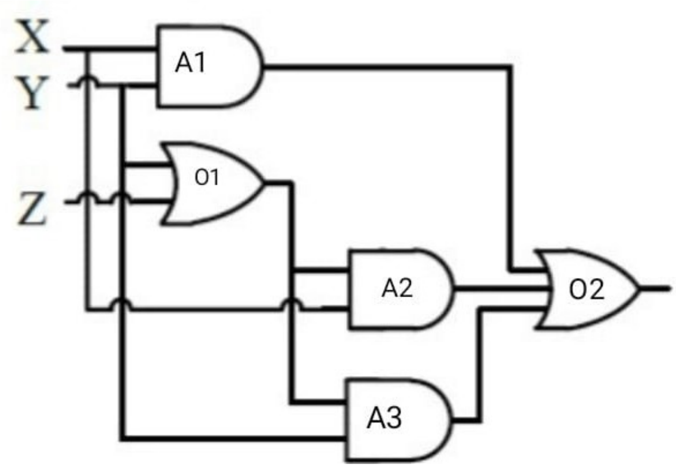
மேலே தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் வெளியீடு என்ன?

$(a) X + YZ$ $(b) Y + XZ$

$(c) XYZ$ $(d) X + Y + Z$

விடை

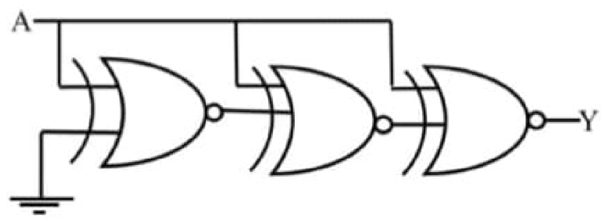
தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் வெளியீட்டை கண்டுபிடிக்க, ஒவ்வொரு வாயிலுக்கும் பெயரிடலாம்.



வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
$A1$	X, Y	$X.Y$
$O1$	Y, Z	$Y+Z$
$A2$	$(Y+Z), X$	$(Y+Z).X$ $=XY+XZ$
$A3$	$(Y+Z), Y$	$(Y+Z).Y$ $=Y.Y+YZ$ $=Y(1+Z)=Y$
$O2$	$XY, (XY+XZ), Y$	$XY+XY+XZ+Y$ $=XY+XZ+Y$ $=Y(1+X)+XZ$ $=Y.1+XZ=Y+XZ$

சரியான விடை : (b)

பயிற்சி 4.16 (IIT JAM 2021)



தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் வெளியீடு என்ன?

(a) 0 (b) 1 (c) A (d) $\overline{A}$

விடை

தரப்பட்டுள்ள மூன்று வாயில்களுக்கு EXN1, EXN2, EXN3 என பெயரிடலாம்.

- EXNOR மெய்ப்பப்பட்டியலை பார்க்கலாம்.

A	B	$Y=\overline{A+B}$
0	0	1
0	0	0
1	0	0
1	1	1

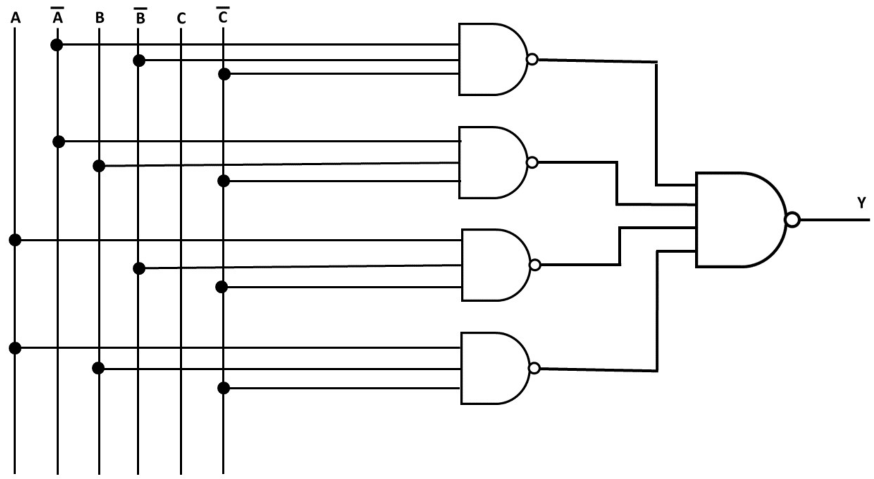
ஏதேனும் ஒரு உள்ளீடு 0 என்றால், EXNORன் வெளியீடு, அதன் மற்றொரு உள்ளீட்டின் தலைகீழ் மதிப்பு என்பது மெய்பட்டியலிலிருந்து தெரிகிறது.

மெய்பட்டியல் உதவியில் வெளியீட்டை கண்டுபிடிக்கலாம்.

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
$EXN1$	$0, A$	$\overline{A}$
$EXN2$	$\overline{A}, A$	0
$EXN3$	$0, A$	$\overline{A}$

சுற்றின் வெளியீடு $\overline{A}$ ஆகும். எனவே, சரியான விடை : (d)

பயிற்சி 4.17 (IIT JAM)



இச்சுற்றின் வெளியீடு (Y) என்ன?

$(a)\overline{A}+B+C$ $(b)A$ $(c)B$ $(d)\overline{C}$

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் இருக்கும் வாயில்களுக்கு பெயரிட்டு, அதன் உள்ளீடுகளை கவனமாக எழுதினால் இதன் விடையைக் காண முடியும்.
- வரிசையாக உள்ள வாயில்களுக்கு $N1, N2, N3, N4$ எனவும், கடைசியாக Y வெளியீட்டை தரும் வாயிலுக்கு $N5$ எனவும் பெயரிடலாம்.

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
$N1$	$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$	$\overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}}$
$N2$	$\overline{A}, B, \overline{C}$	$\overline{\overline{A}B\overline{C}}$
$N3$	$A, \overline{B}, \overline{C}$	$\overline{A\overline{B}.\overline{C}}$
$N4$	$A, B, \overline{C}$	$\overline{AB\overline{C}}$
$N5$	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}, \overline{A}B\overline{C}, A.\overline{B}.\overline{C}, AB\overline{C}$	Y

$$Y = \overline{(\overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}}).(\overline{\overline{A}B\overline{C}}).(\overline{A.\overline{B}.\overline{C}}).(\overline{AB\overline{C}})}$$

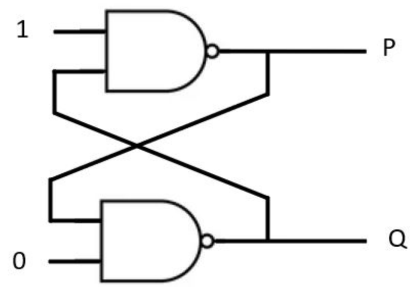
$$= \overline{\overline{X}.\overline{Y}} = \overline{\overline{X+Y}} = X + Y$$

$$\therefore Y = (\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) + (\overline{A}.B.\overline{C}) + (A.\overline{B}.\overline{C}) + (A.B.\overline{C})$$
$$= \overline{B}.\overline{C}(\overline{A} + A) + B\overline{C}(\overline{A} + A)$$
$$= \overline{B}.\overline{C} + B\overline{C} = \overline{C}(\overline{B} + B) = \overline{C}.1 = C$$

இச்சுற்றின் வெளியீட்டு மதிப்பு C

சரியான விடை : (d)

பயிற்சி 4.18 (IIT JAM 2017)



இரண்டு தர்க்க வாயில்களின் தொகுப்பு தரப்பட்டுள்ளது. P, Qவில் பெறப்படும் மதிப்பு என்ன?

(a) 0, 0 (b) 1, 1 (c) 0, 1 (d) 1, 0

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் உள்ள வாயில்களை $N1, N2$ என அழைக்கலாம்.

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
$N1$	$1, Q$	$\overline{1.Q} = ?$
$N2$	$0, P$	$\overline{0.P} = \overline{0} = 1$

எனவே

$N1$	1,1	$\overline{1.1} = \overline{1} = 0$

P மற்றும் Qவின் மதிப்பு முறையே 0 மற்றும் 1

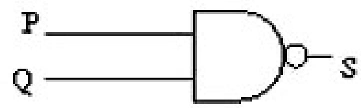
சரியான விடை : (c)

பயிற்சி 4.19 (IIT JAM 2015)

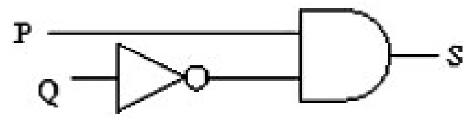
$$S=\overline{\overline{P+QR}+\overline{\overline{Q}P}}$$

எனும் பூலியன் தர்க்கத்தைக் குறிக்கும் சுற்று எது?

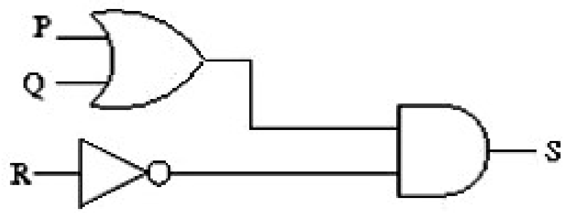
(A)



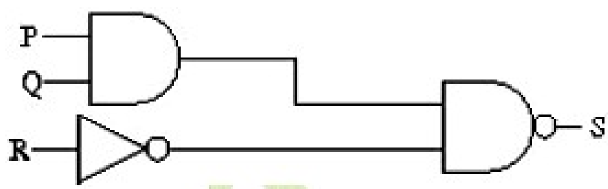
(B)



(C)



(D)



விடை :

- தரப்பட்டுள்ள தர்க்கம்

$$S=\overline{\overline{P+QR}+\overline{\overline{Q}P}}$$

$$=\left(\overline{\overline{P+QR}}\right).\left(\overline{\overline{\overline{Q}P}}\right)$$ (டி மார்கன் தேற்றம் : $\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$)

$$=(P+QR).\overline{Q}P$$ ($\overline{\overline{A}}=A$)

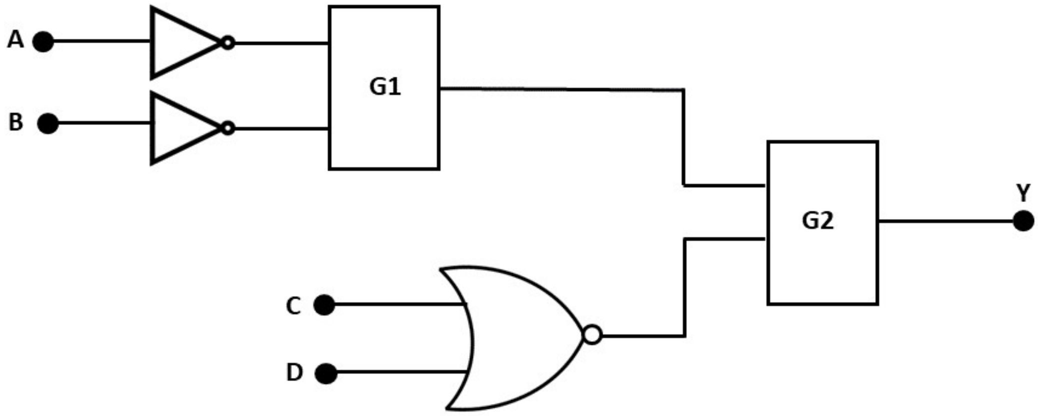
$$=P\overline{Q}P+QR\overline{Q}P$$ (பகிர்வு விதி)

$$=\overline{Q}P+0$$ $Q\overline{Q}=0$

$$=\overline{Q}P$$

விடை : (b)

பயிற்சி 4.20



தரப்பட்டுள்ள தர்க்க சுற்றின் வெளியீடு Y எனக் கொள்க. $Y = AB + \overline{C}\overline{D}$ எனில், G1 மற்றும் G2வை கண்டுபிடி.

a) OR மற்றும் NAND b) NOR மற்றும் OR

c) AND மற்றும் NAND d) NAND மற்றும் OR

விடை

- $Y = AB + \overline{C}.\overline{D}$ என தரப்பட்டுள்ளது.
- G2 வின் உள்ளீடுகளை M, N எனக் கொள்ளலாம்.
- இதில் $N = \overline{C+D}$
- எனவே $MO_2(\overline{C+D}) = AB + \overline{C}.\overline{D}$

  $= AB + (\overline{C+D})$
- சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கத்தையும் ஒப்பிட்டால்,

  $M = AB$

  $O_2 = +$
- எனவே, G1 மூலம் நிகழும் செயல்பாடு O_1 எனக் கொண்டால்,

  $\overline{A}O_1\ \overline{B} = AB$

  $\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

எனவே,

$$\overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{\overline{AB}} = AB$$

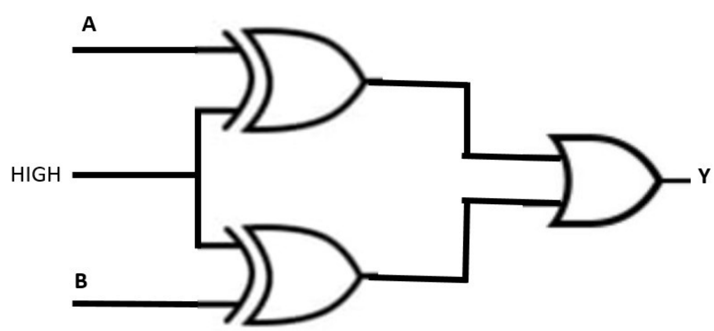
அதனால் O_1 என்பது NOR செயல்பாடு.

G1 என்பது NOR வாயில் ; G2 என்பது OR வாயில்

சரியான விடை : (b)

பயிற்சி 4.21

தரப்பட்டுள்ள சுற்று எந்த பூலியன் செயல்பாட்டை செயல்படுத்துகிறது?



$a) Y = \overline{A.B}$ $\quad$ $b) Y = \overline{A}.\overline{B}$ $\quad$ $c) A.B$ $\quad$ $d) A+B$

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் உள்ள வாயில்களுக்கு பெயரிட்டு அவற்றின் உள்ளீடு வெளியீடுகளை EXOR மெய்ப்பட்டியல் கொண்டு ஆராயலாம்.

- EXOR மெய்ப்பட்டியல்

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
$\underline{1}$	0	1
$\underline{1}$	1	0

EXOR மெய்ப்பட்டியலில், ஏதேனும் ஒரு உள்ளீடு 0 என்றால், அதன் வெளியீடு இன்னொரு உள்ளீட்டின் தலைகீழ் மதிப்பிற்குச் சமம். எனவே

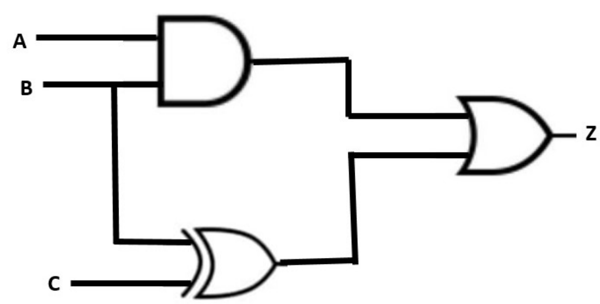
வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
Ex1	A, 1	$\overline{A}$
Ex2	B, 1	$\overline{B}$
OR	$\overline{A},\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}=\overline{A.B}$

சரியான விடை : (a)

பயிற்சி 4.22

தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் C எப்போதும் 'HIGH' (1) மதிப்பு உடையது. இந்தச் சுற்றின் மெய்ப்பட்டியலை எவ்வாறு நிறைவு செய்யலாம்?

சுற்று :



மெய்ப்பட்டியலின் Z வரிசை மதிப்புகள்

(a) 1010 (b) 0100 (c) 1111 (d) 1011

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் உள்ள வாயில்களின் உள்ளீடு வெளியீடுகளை அலசலாம்.

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
AND	A, B	AB
EXOR	1, B	$\overline{B}$
OR	$AB,\overline{B}$	$Z=AB+\overline{B}=A+\overline{B}$

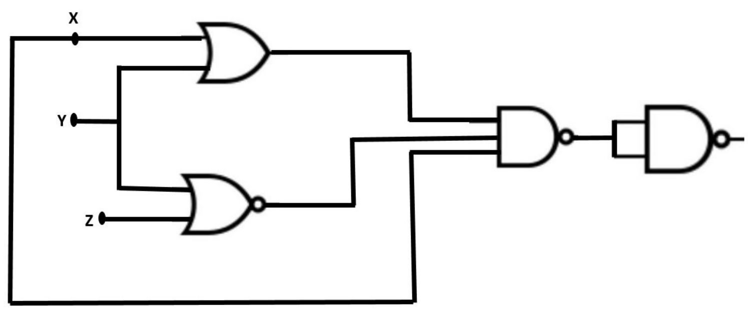
- எனவே, மெய்ப்பட்டியலின் மூலம் Z மதிப்புகள் காணலாம்.

A	B	$\overline{B}$	$Z = A + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

சரியான விடை: (d)

பயிற்சி 4.23

தரப்பட்டுள்ள தர்க்க சுற்றின் எளிய வடிவம் எது?



$(a) X + YZ$ $(b) Y + XZ$ $(c) X\overline{Y}.\overline{Z}$ $(d) \overline{X}Y\overline{Z}$

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றில் இருக்கும் வாயில்களின் உள்ளீடுகளும் வெளியீடும் இதோ.

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
OR	X, Y	$X + Y$
NOR	Y, Z	$\overline{Y + Z} = \overline{Y}.\overline{Z}$
NAND 1	$(X + Y), (\overline{Y + Z}), X$	$= \overline{(X+Y).(\overline{Y+Z}).X}$ $= \overline{(X+Y).(\overline{Y}.\overline{Z}).X}$

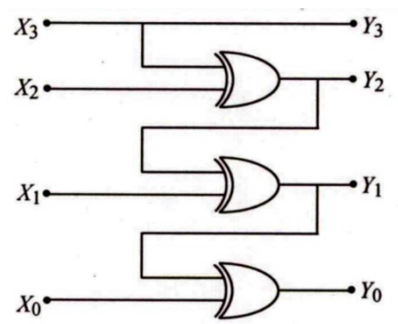
வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
		$=\overline{XX\overline{Y}.\overline{Z}+YX\overline{Y}.\overline{Z}}$ $=\overline{X\overline{Y}.\overline{Z}+0}$ $=\overline{X\overline{Y}.\overline{Z}}$
NAND2	$\overline{X\overline{Y}.\overline{Z}}$	$=X\overline{Y}.\overline{Z}$

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் வெளியீடு $X\overline{Y}.\overline{Z}$

சரியான விடை : (c)

பயிற்சி 4.24

தரப்பட்டுள்ள சுற்றிற்கு 1011 எனும் உள்ளீடு வழங்கப்பட்டால், $Y_3Y_2Y_1Y_0$ மதிப்பு காண்க.



(a) 1101 (b) 1010 (c) 1111 (d) 0101

விடை

- தரப்பட்டுள்ள உள்ளீடு 1011
- சுற்றில் உள்ள EX-OR வாயில்களுக்கு முறையே G2, G1, G0 என பெயரிட்டு, வெளியீட்டு மதிப்பை கண்டுபிடிக்கலாம்.

EXOR மெய்ப்பட்டியல்

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
G2	1, 0	1
G1	1, 1	0
G0	0, 1	1

- எனவே, தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் $Y_3Y_2Y_1Y_0$ மதிப்பு 1101

சரியான விடை : (a)

பயிற்சி 4.25 IIT JAM 2012

$P+\overline{P}Q$ எனும் பூலியன் தர்க்கத்தை செயல்படும் வாயில் எது?

(a) AND (b) NAND (c) NOT (d) OR

விடை

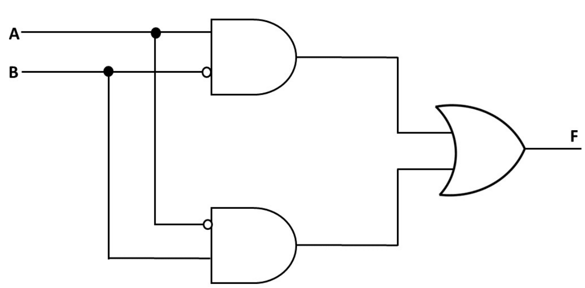
$P+\overline{P}Q = P+Q$ என்பது பூலியன் நிபந்தனை 4.4(iii)யை பார்க்கவும்.

சரியான விடை : (d)

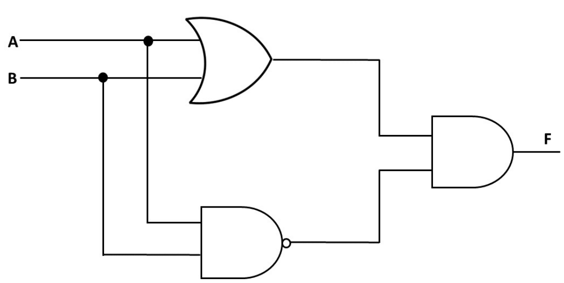
பயிற்சி 4.26

தரப்பட்டுள்ள சுற்றுகளில் எந்தச் சுற்றால் $A.\overline{B}+\overline{A}.B=F$ எனும் பூலியன் தர்க்கத்தை செயல்படுத்த இயலாது?

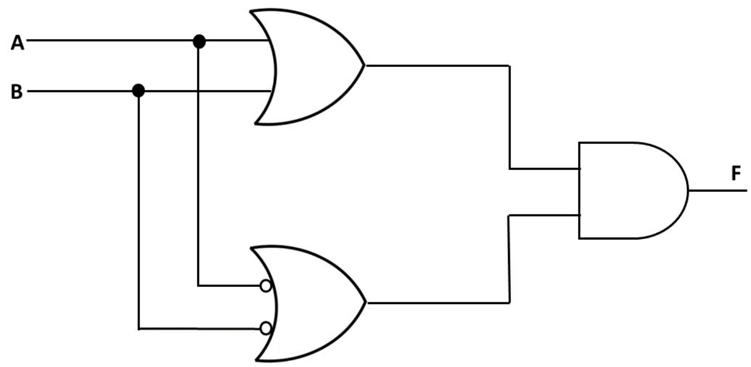
a)



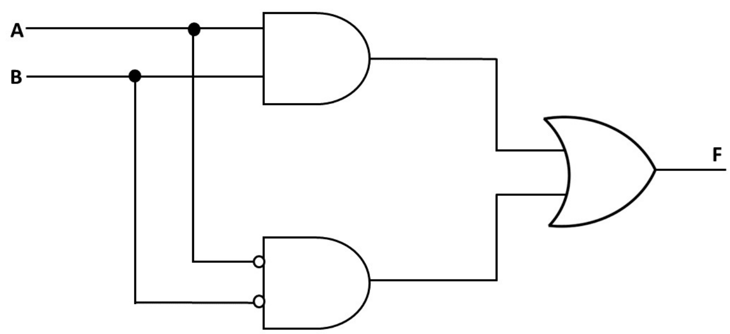
b)



c)



d)



விடை

ஒவ்வொரு சுற்றின் வெளியீட்டையும் அலசி, விடை காணப் பார்க்கலாம்.

சுற்று	வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
a)	*A1*	$A,\overline{B}$	$A\overline{B}$
	A2	$\overline{B},A$	$\overline{B}A$
	OR	$A\overline{B},\overline{B}A$	$F=A\overline{B}+\overline{B}A$
b)	OR	*A, B*	*A+B*
	NAND	*A, B*	$\overline{A.B}$
	NAND	*A, B*	$\overline{A.B}$
	AND	$(A+B),\overline{A.B}$	$F=(A+B).(\overline{A.B})$ $=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ $=A.\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}$ $=A\overline{B}+B\overline{A}$
c)	OR	*A, B*	*A+B*
	Bubbled OR	*A, B*	$\overline{A}+\overline{B}$

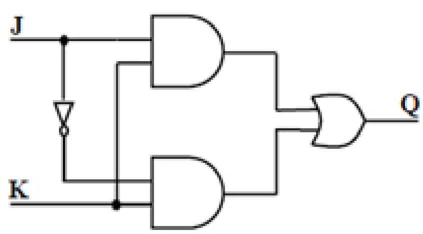
சுற்று	வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
	AND	$(A+B),(\overline{A}+\overline{B})$	$F=(A+B).(\overline{A}+\overline{B})$ $=A.\overline{A}+A.\overline{B}+B.\overline{A}+B.\overline{B}$ $=A.\overline{B}+B.\overline{A}$
d)	AND	A, B	$A.B$
	Bubbled AND	A, B	$\overline{A}.\overline{B}$
	OR	$A.B,(\overline{A}.\overline{B})$	$F=(A.B).(\overline{A}.\overline{B})$ $=A\overline{B}+B\overline{A}$

- இங்கே $F=A\overline{B}+\overline{A}B$. இது XOR தர்க்கம் என்பதை நாம் அறிவோம். ஆனால், $AB+\overline{A}.\overline{B}$ என்பது $XNOR$ தர்க்கம். எனவே அது தரப்பட்ட தர்க்கத்திற்கு சமம் கிடையாது.

சரியான விடை : (d)

பயிற்சி 4.27

தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் மெய்ப்பட்டியலை தேர்வு செய்.



(a)

J	K	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

(c)

J	K	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(b)

J	K	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(d)

J	K	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

விடை

$AND1$ வெளியீடு $= JK$

$AND2$ வெளியீடு $= \overline{J}K$

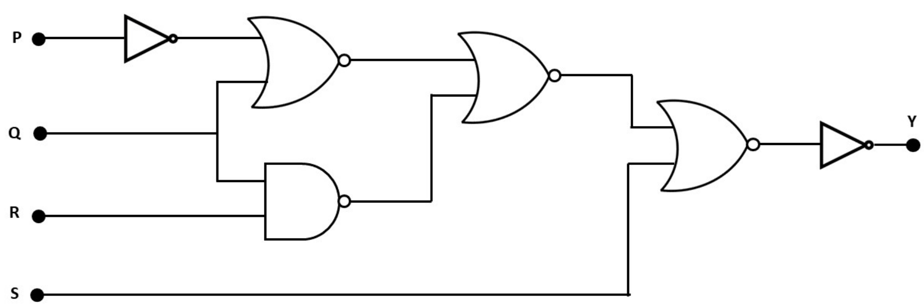
எனவே, OR வாயிலின் வெளியீடு

$$Q = JK + \overline{J}K = K(J + \overline{J})$$
$$= K.1 = K$$
$$Q = K$$

சரியான விடை : (c)

பயிற்சி 4.28

தரப்பட்டுள்ள தர்க்கச் சுற்றில் Y என்ன?



$a)\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}}+S$ $\quad$ $b)\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}+S}$

$c)\overline{\overline{P}+Q+\overline{QR}}+S$ $\quad$ $d)\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}}+\overline{S}$

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சுற்றின் விடை காண வாயில்களின் செயல்பாட்டை வரிசையாகப் பார்க்கலாம்.

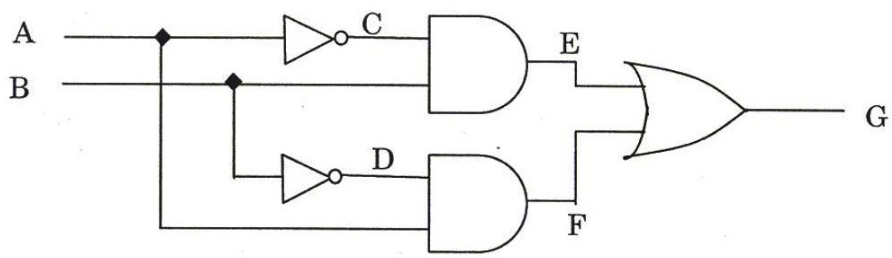
வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
NOT1	P	$\overline{P}$
NOR1	$\overline{P},Q$	$\overline{\overline{P}+Q}$
NAND	Q,R	$\overline{QR}$

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
NOR 2	$\overline{\overline{P}+Q}, \overline{QR}$	$\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}}$
NOR 3	$\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}}, S$	$Y=\overline{\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}}+S}$
NOT2	$Y=\overline{\overline{\overline{\overline{P}+Q},\overline{QR}}+S}$	$Y=\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{P}+Q}+\overline{QR}}+S}}$

சரியான விடை (a)

பயிற்சி 4.29

A=0110011001; B = 0011001100 என்பதை பின்வரும் சுற்றில் உள்ளீடாகத் தரும்போது, C,D,E,F,G ஆகிய இடங்களில் பெறப்படும் மதிப்பு என்ன?



விடை

- தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள்

  A = 0 11 00 11 00 1

  B = 00 11 00 11 00

- சுற்றை ஆராய்ந்தால்,

  $C=\overline{A}$

  $D=\overline{B}$

  $E=CB$

  $F=AD$

  $G=E+F$ என்பது புலப்படும்.

- எனவே,

  C = 1 00 1 100 11 0

  D = 11 00 1 1 00 11

  E = 000 1 000 100

  F = 01 000 1 000 1

  G = 01 01 01 01 01 என்பது விடை

பயிற்சி 4.30 IISC 2011

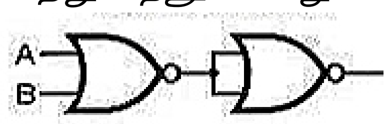
$A + B + A\overline{B}C + BC$ என்பதை பூலியன் விதிப்படி சுருக்கவும்.

விடை

$$\begin{aligned} Y &= A + B + A\overline{B}C + BC \\ &= A + A\overline{B}C + B + BC \\ &= A(1 + \overline{B}C) + B(1 + C) \qquad (1 + A = 1) \\ &= A.1 + B.1 \\ &= A + B \end{aligned}$$

பயிற்சி 4.31 CET PHY 2010

தரப்பட்டுள்ள தர்க்கச் சுற்று எதனுடையது?



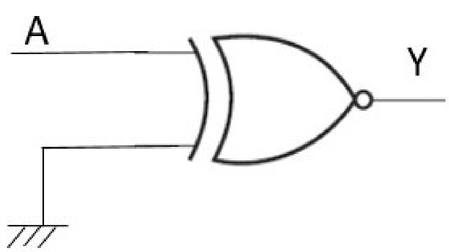
(a) NOT (b) NAND (c) OR (d) NOR

- OR தர்க்கம் இங்கே NOR வாயில்கள் மூலம் செயல்படுத்தப்படுகிறது.

விடை : (c)

பயிற்சி **4.32** CET PHY 2014

தரப்பட்டுள்ள தர்க்கச் சுற்றில் Y என்ன?



விடை : ஒரு EXNOR தரப்பட்டுள்ளது.

- இதன் ஒரு உள்ளீடு ‘0’ எனில், $Y = \overline{A}$

பயிற்சி 4.33 CET PHY

ஒரு NAND வாயிலின் இரண்டு உள்ளீடாகவும் ஒரு OR வாயிலின் வெளியீடு தரப்பட்டால் இத்தொகுப்பு என்ன வாயிலாக செயல்படும்?

விடை : ஒரு NOR வாயிலாக செயல்படும்.

பயிற்சி 4.34 CET PHY

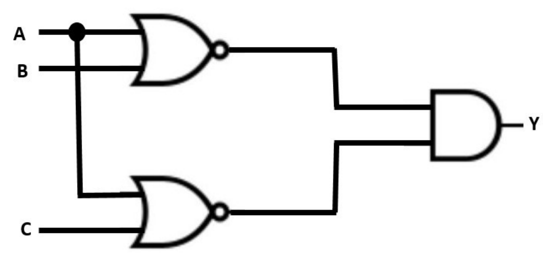
தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியல் எந்த வாயிலினுடையது?

A	B	Y
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

விடை: XOR வாயிலினுடையது.

பயிற்சி 4.35 CET PHY 2011

தரப்பட்டுள்ள தர்க்கச் சுற்றின் மதிப்பு என்ன?



விடை

வாயில்	உள்ளீடு	வெளியீடு
NOR 1	A, B	$\overline{A+B}$
NOR 2	A, C	$\overline{A+C}$
AND	$\overline{A+B}$, $\overline{A+C}$	$(\overline{A+B}).(\overline{A+C})$ $=(\overline{A}.\overline{B}).(\overline{A}.\overline{C})$ $=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

எனவே, $Y=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

பயிற்சி 4.36

$\overline{A}BC+\overline{A}.\overline{B}.C+AB\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C}$ என்பதன் விடை என்ன?

(a) A EXOR C (b) A AND C (c) 0 (d) 1

விடை

$$Y=\overline{A}BC+\overline{A}.\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}.\overline{C}$$
$$=\overline{A}C(B+\overline{B})+A\overline{C}(B+\overline{B}) \qquad (\because B+\overline{B}=1)$$
$$=\overline{A}C+A\overline{C}=A\oplus C$$

விடை : (a)

பயிற்சி 4.37 (IIT JAM 2018)

$(\overline{AB})(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$ என்பதன் சுருக்கம் என்ன?

$(a)A+B$ $(b)\overline{A}B$ $(c)\overline{A+B}$ $(d)AB$

விடை

$$Y=(\overline{AB})(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$$
$$=\overline{AB}[\overline{A}A+\overline{A}.\overline{B}+AB+B\overline{B}]$$
$$=\overline{AB}(\overline{A}.\overline{B}+AB) \qquad (\because A\overline{A}=0)$$
$$=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}.\overline{B}+AB) \qquad (\text{டி மார்கன் தேற்றம்})$$
$$=\overline{A}.\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}AB+\overline{B}.\overline{A}.\overline{B}+\overline{B}AB$$
$$=\overline{A}.\overline{B}+\overline{B}.\overline{A}=\overline{A}.\overline{B} \qquad (A+A=A)$$
$$=\overline{A+B} \qquad (\text{டி மார்கன் தேற்றம்})$$

சரியான விடை : (c)

பயிற்சி 4.38 (IIT JAM 2003)

$(\overline{A}+\overline{B})[\overline{A(B+C)}]+A(\overline{B}+\overline{C}]$ என்பதை எந்த வாயிலின் மூலம் செயல்படுத்த முடியும்?

(a) AND (b) OR (c) XOR (d) NAND

விடை

$$
\begin{aligned}
Y &= (\overline{A}+\overline{B})[\overline{A(B+C)}] + A(\overline{B}+\overline{C}) \\
&= (\overline{A}+\overline{B})[\overline{AB+AC}] + A\overline{B} + A\overline{C} \\
&= (\overline{A}+\overline{B})[(\overline{A}+\overline{B}).(\overline{A}+\overline{C})] + A\overline{B} + A\overline{C} \\
&= (\overline{A}+\overline{B})[\overline{A}.\overline{A} + \overline{A}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{C}] + A\overline{B} + A\overline{C} \\
&= (\overline{A}+\overline{B})[\overline{A} + \overline{A}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B} + \overline{B}.\overline{C}] + A\overline{B} + A\overline{C} \\
&= (\overline{A}+\overline{B})[\overline{A}(1+\overline{C}+\overline{B}) + \overline{B}.\overline{C}] + A\overline{B} + A\overline{C} \\
&= (\overline{A}+\overline{B})[\overline{A} + \overline{B}.\overline{C}] + A\overline{B} + A\overline{C} \\
&= \overline{A}.\overline{A} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{B}.\overline{C} + A\overline{B} + AC && (\because A + AB = 1) \\
&= \overline{A}[1 + \overline{B}.\overline{C} + \overline{B}] + \overline{B}.\overline{C} + A\overline{B} + A\overline{C} && (A + 1 = A) \\
&= (\overline{A} + A\overline{B}) + \overline{B}.\overline{C} + A\overline{C} && (AA = A) \\
&= (\overline{A} + \overline{B}) + \overline{B}.\overline{C} + A\overline{C} && (A + \overline{A}B = A + B) \\
&= \overline{A} + \overline{B}(1+\overline{C}) + A\overline{C} && (1 + A = 1\ \&\ A.1 = A) \\
&= \overline{A} + \overline{B}.1 + A\overline{C} \\
&= \overline{A} + A\overline{C} + \overline{B} && (A + \overline{A}B = A + B) \\
&= \overline{A} + \overline{C} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \\
&= \overline{A.B.C}
\end{aligned}
$$

சரியான விடை : (d)

வினாக்கள்

குறுவினாக்கள்

1. இடமாற்ற விதியை எழுதுக.
2. தனக்கான மாற்றியாகச் செயல்படும் வாயில் எது?
3. இணை ஒன்று இருக்கும் கார்ணா வரைபடத்தை வரைக.

சிறுவினாக்கள்

1. டி மார்கன் தேற்றங்களை எழுதி, அவற்றை மெய்ப்பிக்கவும்.
2. $(i) OR, AND$ வாயில்களுக்கான தொடர்விதியை எழுதி, அவற்றிற்கான தர்க்கச் சுற்றை வரையவும். (ii) பகிர்வு விதிகளை தகுந்த தர்க்கச் சுற்றுகள் கொண்டு விளக்குக.
3. உள்ளீடும் வெளியீடும் சமமாக இருக்கும் விதிகள் எவை? விவரி.
4. $A+AB=A; A.(A+B)=A$ எனும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக. இவற்றிற்கு உள்வாங்கு விதிகள் என ஏன் பெயரிட்டு அழைக்கிறோம்?
5. NOR வாயிலை முழுமையான கட்டமைப்புத் தொகுதி (Universal building block) என அழைப்பதற்கான காரணத்தை விளக்குக.
6. $NAND$ வாயிலை பயன்படுத்தி OR, AND, NOT, வாயில்களை எவ்வாறு செயலாக்க OR, AND, NOT இயலும் என்பதை விரிவாக எழுதுக.
7. $AB+BC+CA=(A+B)(B+C)(A+C)$ என்பதை நிறுவுக. (UNOM)
8. பூலியன் விதிகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளை சுருக்கி எழுதுக.

   $(a) Y=(A+B)(\overline{A}+C)(\overline{B}+C)$

   $(b) Y=\overline{\overline{AB}+\overline{A}+AB}$

9. $A+(B.C)=(A+B).(A+C)$ என்பதை மெய்பட்டியல் மூலம் நிறுவுக. இதற்கான தர்க்கச் சுற்று வரைக.

நெடுவினாக்கள்

1. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

   (a) வட்டமிடப்பட்ட OR வாயில் ஒரு $NAND$ வாயிலுக்குச் சமம்.

   (b) $AND-OR$ தொகுப்புக்கு ஈடானது ஒரு $NAND-NAND$ தொகுப்பு.

   (c) வட்டமிடப்பட்ட AND வாயில் என்பது ஒரு OR வாயிலுக்குச் சமம்.

பாடம் 5

கார்ணா வரைபடம்

இப்பாடத்தின் கற்றல் நோக்கங்கள்

- பெருக்கலை கூட்டுதல் மற்றும் கூட்டலை பெருக்குதல் ஆகிய வழிமுறைகளை கற்றல்.
- கார்ணா வரைபடங்கள் வரைதல்.
- தர்க்க சமன்பாடுகளை சுருக்கி எழுதுதல்.

5.1 அறிமுகம்

பூலியன் விதிகளையும் நிபந்தனைகளையும் கொண்டு தர்க்க சமன்பாடுகளை சுருக்கமாக எழுதமுடியும். மற்றொரு முறையான கார்ணா வரைபடம் பயன்படுத்தியும் தர்க்க சமன்பாடுகளை சுருக்க முடியும்.

(i) பெருக்கலை கூட்டுதல் **(Sum of Product - SOP)** மற்றும்

(ii) கூட்டலை பெருக்குதல் **(Prodcut of Sum - POS)** முறைகள் கார்ணா வரைபடம் அமைக்க உதவுகின்றன.

இவற்றின் மூலம் மெய்பட்டியலை பூலியன் தர்க்கமாக அல்லது கோர்வைகளாக **(Logical expression)** மாற்ற முடியும். இந்த பாடத்தில் கார்ணா வரைபடம் கொண்டு சீரிய தர்க்க சமன்பாடுகளை எவ்வாறு பெறுவது என்று பார்க்கப் போகிறோம்.

5.2 பெருக்கலை கூட்டுதல் (Sum of Product)

$Y=\overline{A}BC+A\overline{B}.\overline{C}+AB\overline{C}$ எனும் ஒரு தர்க்க சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இது ஒரு OR கூட்டல் சமன்பாடு. $\overline{A}BC, A\overline{B}.\overline{C}, AB\overline{C}$ இவை மூன்றும் AND பெருக்கல் மதிப்புகள். அதாவது $\overline{A}BC$ என்பது $\overline{A}.B.C$ ஆகிய மூன்றின் AND மதிப்பாகும். அடுத்துள்ள $A\overline{B}.\overline{C}$ என்பது $A,\overline{B},\overline{C}$ ஆகியவற்றின்

AND மதிப்பு. இதுபோலவே $AB\overline{C}$ என்பதும் $A,B,\overline{C}$ என்பனவற்றின் AND மதிப்பு என்பதை நாம் அறிவோம்.

இங்கே AND பெருக்கல் மதிப்புகளை OR வாயில் மூலம் கூட்டினால் வரும் விடை ஒரு செயல்பாட்டை நிகழ்த்த உதவுகிறது. இதில் உள்ள ஒவ்வொரு AND பெருக்கலின் மதிப்பும் **HIGH = 1 = மெய்** என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்.

இவ்வாறு மெய் = 1 என வெளியீடு தரும் AND தர்க்க பெருக்கல் தொகுதிகள், **அடிப்படை பெருக்கல்கள்** (Fundamental Products / Standard Products) எனப்படும். இவற்றை 'Minterm' (சிறுமக்கூறு) என்றும் அழைக்கிறோம். இதன் குறியீடு 'm' ஆகும். மேலே தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில் $\overline{A}BC, A\overline{B}.\overline{C}, AB\overline{C}$ என மூன்று அடிப்படை பெருக்கல்கள் அல்லது சிறுமக் கூறுகள் உள்ளன.

ஒரு டிஜிட்டல் சுற்றில், இத்தகைய மெய் = 1 தரும் வெளியீட்டை, பெருக்கல்களின்(AND) கூட்டல்(OR) மதிப்பை நாம் **பெருக்கலின் கூட்டல் மதிப்பு** (Sum of Products – SOP) என அழைக்கிறோம்.

இதில் ஒவ்வொரு அடிப்படை பெருக்கலும் 1 எனும் வெளியீட்டை தருவதால், இவற்றின் OR கூட்டலும் 1 மதிப்பை அளிக்கும். இதனால், சுற்றின் வெளியீடு Y = மெய் = 1.

5.2.1 மெய்பட்டியலிலிருந்து சமன்பாட்டை பெறுதல்

ஒரு செயல்பாட்டின் தர்க்க சமன்பாட்டை, அதன் மெய்பட்டியலிலிருந்து பெறமுடியும். 'பெருக்கலை கூட்டுதல்' முறையில் இதற்கான வழிமுறையை பார்க்கலாம்.

i) செயல்பாட்டின் மெய்பட்டியல் இடவேண்டும்.

ii) வெளியீடு மெய்=1 வழங்கும் **அடிப்படை பெருக்கல்** தொகுதிகளை எழுத வேண்டும்.

iii) அடிப்படை பெருக்கல் எழுதும்போது, 0 என இருக்கும் உள்ளீட்டை தலைகீழாக புரட்டி எழுத வேண்டும்.

iv) அடிப்படை பெருக்கல்களை OR கூட்டல் முறையில் தொகுத்து பூலியன் சமன்பாட்டை எழுத வேண்டும்.

v) பூலியன் இயற்கணித விதிகள் கொண்டு இதனை முடிந்தவரையில் சுருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு : 1

இரண்டு உள்ளீடுகள் உடைய ஒரு OR வாயிலின் பூலியன் சமன்பாடு நமக்கு ஏற்கனவே தெரியும். மேலே சொல்லப்பட்ட வழிமுறைகளை பின்பற்றி இதை பெறப் பார்க்கலாம்.

A	B	Y	அடிப்படை பெருக்கல்
0	0	0	_
0	1	1	$\overline{A}B = m_1$
1	0	1	$A\overline{B} = m_2$
1	1	1	$AB = m_3$

மூன்று விதமாக உள்ளீடுகளை சேர்க்கையில் நமக்கு $Y = 1$ கிடைக்கிறது. எனவே, இதில் மூன்று அடிப்படை பெருக்கல்கள் உள்ளன.

$$m_1 = \overline{A}B$$
$$m_2 = AB$$
$$m_3 = AB$$

இவற்றை OR வாயில் மூலம் கூட்டினால் SOP வரும்.

$$Y = \overline{A}B + A\overline{B} + AB \qquad \ldots\ldots. \ (1)$$

இதனை மேலும் சுருக்கி எழுதமுடியும்.

(1)லிருந்து, $Y = \overline{A}B + A(\overline{B} + B)$

$$= \overline{A}B + A.1 \qquad (A + \overline{A} = 1)$$

$$= \overline{A}B + A \qquad (A.1 = A)$$

$$= A + B \qquad \text{(பூலியன் நிபந்தனைப்படி)}$$

எனவே, தரப்பட்ட மெய்ப்பட்டியலின் செயல்பாட்டு தர்க்கம் $Y = A + B$ ஆகும். இது OR வாயிலின் தர்க்க விதி.

எடுத்துக்காட்டு : 2

மூன்று உள்ளீடுகள் கொண்ட ஒரு மெய்ப்பட்டியலிலிருந்து, அதன் தர்க்க சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்கலாம்.

தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியல்

A	B	C	Y	
0	0	0	0	-
0	0	1	0	-
0	1	0	1	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	-
1	0	1	1	m_5
1	1	0	0	-
1	1	1	1	m_7

- மேலே தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலில் நான்கு விதமாக உள்ளீடுகள் $Y = 1$ மெய் எனும் வெளியீட்டை தருகின்றன.
- எனவே, இதற்கு மொத்தம் நான்கு அடிப்படை பெருக்கல்கள் உண்டு. அவற்றை m_2, m_3, m_5, m_7 என்று குறிக்கலாம்.

எனவே,

$$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$$
$$m_3 = \overline{A}BC$$
$$m_5 = A\overline{B}C$$
$$m_7 = ABC$$

அடுத்து, இவற்றை OR வாயில் கொண்டு கூட்டினால், தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலின் Y கிடைக்கும். இந்த பெருக்கலின் கூட்டல் மதிப்பு (SOP) சமன்பாடு (2)ல் தரப்பட்டுள்ளது. இதனை பூலியன் விதிகள் கொண்டு முடிந்தவரை சுருக்கி எழுதலாம்.

பெருக்கலின் கூட்டல் மதிப்பு (SOP) :

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC \qquad \dots (2)$$

$$= \overline{A}B(\overline{C} + C) + AC(\overline{B} + B)$$
$$= \overline{A}B.1 + AC.1 \qquad (\because A + \overline{A} = 1 \ \ \& \ \ A.1 = A)$$
$$= \overline{A}B + AC$$

தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலின் சமன்பாடு $Y = \overline{A}B + AC$ என, பெருக்கலை கூட்டுதல் முறை மூலம் இங்கே பெற்றுள்ளோம்.

5.2.2 ஒழுங்குமுறை மற்றும் வழக்கமுறை சமன்பாடுகள்

மேலே பார்த்த எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம்,

$Y = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$ … 1(a) என்பதை

$Y = A + B$ … 1(b) எனவும்,

$Y = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$ … 2(a) என்பதை

$Y = \overline{A}B + AC$ .... 2(b) எனவும் எழுதலாம் என்பதை புரிந்துக்கொண்டோம். ஏனெனில், 1(a) மற்றும் 1(b) இரண்டும் ஒரே மெய்ப்பட்டியலின் செயல்பாட்டையே குறிக்கின்றன. எனவே அவை சமமானவை. அதுபோல 2(a)

மற்றும் 2(b) இரண்டும் சமம் என்றபோதும் இவற்றின் வடிவில் வேறுபாடு உள்ளது.

- 1(a) மற்றும் 1(b) உணர்த்தும் மெய்ப்பட்டியலில் இரண்டு உள்ளீடுகள் (A, B) உள்ளன.
- 1(a) சமன்பாட்டில் உள்ள **ஒவ்வொரு** பெருக்கல் மதிப்பும் அதன் **அடிப்படை பெருக்கல்** மதிப்பை அப்படியே உணர்த்துகிறது. அனால் 1(b) சமன்பாட்டில் அடிப்படை பெருக்கல் மதிப்புகள் இல்லை.
- 1(a) சமன்பாடு விரிவான ஒன்று. ஆனால் 1(b) சுருக்கமானது.
- அந்த மெய்ப்பட்டியலின் **எல்லா** மாறிகளும் (A, B) 1(a)வில் உள்ளன. **ஒவ்வொரு** பெருக்கல் மதிப்பிலும் - அவை நேராகவோ (A, B) அல்லது தலைகீழாகவோ $(\overline{A}, \overline{B})$ ஏதோ ஒரு விதத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.
- அதாவது $\overline{A}B, A\overline{B}, AB$ என இந்த மூன்றிலும், இவை இரண்டும் இடம் பிடித்துள்ளன. மாறாக 1(b) சமன்பாட்டில் உள்ள மதிப்புகளில் ஒரு மாறிலி விடுபட்டுள்ளது.
- இது போலவே 2(a) சமன்பாட்டில் மூன்று மாறிகளும் ஏதோ ஒரு வடிவில் $(A, \overline{A}, B, \overline{B}$ அல்லது $C, \overline{C})$ ஒவ்வொரு அடிப்படை பெருக்கல் மதிப்பிலும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஆனால், 2(b) சமன்பாட்டில் $\overline{A}B$ யில் C இல்லை AC யில் B யின் பங்கு இல்லை.
- தர்க்க சமன்பாடுகளின் வடிவைப் பொறுத்து, அவற்றை **ஒழுங்குமுறை** வடிவம் (Canonical form) அல்லது **வழக்கமுறை** வடிவம் (Standard form) என்று வகைப்படுத்தலாம்.
- ஒழுங்குமுறை வடிவம் அடிப்படை பெருக்கல்களின் (Fundamental product) கூட்டல் ஆகும். இதில் எல்லா மாறிகளும் இருக்கும். 1(a) & 2(a) இதற்கான எடுத்துக்காட்டு. (இதனை கூட்டல்களின் பெருக்கல் முறையிலும் எழுதலாம்).

- ஆனால், தர்க்க விதிகள் மூலம் படிப்படியாகவோ, கார்ணா வரைபட முறையிலோ சுருக்கமாக வடிக்கப்பட்டது வழக்கமுறை சமன்பாடு. பெயருக்கு ஏற்றார்போல், தர்க்க சுற்றுகளை அமைக்க, வழக்கத்தில் உள்ளது இந்த வடிவம். 1(b) & 2(b) இந்த வடிவத்தில் உள்ளன.

- மேலும், ஒன்றிலிருந்து மற்றொரு வடிவத்தை நம்மால் பெறமுடியும்.

- வழக்கமுறை சமன்பாட்டை தர்க்க சுற்றாக அமைக்கத் தேவைப்படும் வாயில்களின் எண்ணிக்கையைவிட, ஒழுங்குமுறை மூலம் உருவாக்கப்படும் மின்னணு சுற்றிற்கு அதிக வாயில்கள் தேவை.

5.2.3 *மேலும் சில வடிவங்கள்*

தர்க்க சமன்பாட்டுகள் பொதுவாக, மேலும் சில வடிவங்களில் எழுதப்படுகின்றன :

$Y = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$ என்பதை இவ்வாறு பலவிதங்களில் எழுதலாம்.

$(i) Y = m_2 + m_3 + m_5 + m_7$ (சிறுமக்கூறு வடிவம்)

$(ii) F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$

$(iii) Y = \sum(2,3,5,7)$ (தசமக் கூட்டல் வடிவம், $\sum$ என்பது கூட்டலை குறிக்கிறது)

5.3 கூட்டலை பெருக்குதல் (Product of Sum)

$$Y = (A + B + \overline{C}).(A + \overline{B} + C).(A + \overline{B} + \overline{C})$$

- இந்த தர்க்க சமன்பாடு ஒரு பெருக்கல் சமன்பாடு.

- $(A + B + \overline{C}), (A + \overline{B} + C), (A + \overline{B} + \overline{C})$ இவை மூன்றும் OR கூட்டல் மதிப்புகள்.

- இவற்றை AND வாயிலின் மூலம் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் விடை செயல்பாட்டிற்கான தர்க்க சமன்பாடு.

- இதில் உள்ள ஒவ்வொரு OR மதிப்பும் பொய் $=0=LOW$ என்பதை குறிக்கும்.

- இவ்வாறு பொய் $=0=LOW$ அளிக்கும் OR தர்க்க கூட்டல்கள் அடிப்படை கூட்டல் (Fundamental sum அல்லது standard sum) எனப்படும். இவற்றை 'Maxterm' (பெருமக்கூறு) என்றும் அழைக்கிறோம். இதன் குறியீடு 'M' ஆகும்.

- மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில், அடிப்படை கூட்டல்களின் பெருக்கல் மதிப்பு தரப்பட்டுள்ளது. இதனை நாம் கூட்டலின் பெருக்கல் மதிப்பு (Product of Sum-POS) என அழைக்கிறோம்.

- இதில் உள்ள ஒவ்வொரு அடிப்படை கூட்டலின் மதிப்பும் '0' என்பதால், இவற்றை பெருக்கி வரும் AND விடையும் 0 என்று இருக்கும்.

$Y=M_1.M_2.M_3$ என்பது $Y=\Pi(1,2,3)$ போன்ற வடிவம் உடையது. Π என்பது பெருக்கலை (Product) குறிக்கிறது. M_1, M_2, M_3 ஆகியவை (Maxterms) பெருமக் கூறுகள்.

5.3.1 *மெய்பட்டியலிலிருந்து தர்க்க சமன்பாட்டை பெறுதல்*

பெருக்கலை கூட்டுதல் முறையில் செய்தது போலவே, இங்கும் தர்க்க சமன்பாட்டை பெறும் வழிமுறையை பார்க்கலாம்.

(i) செயல்பாட்டின் மெய்பட்டியல் இடவேண்டும்.

(ii) அடிப்படை கூட்டல் தொகுதிகளை $(Y=0)$ குறிக்க வேண்டும். இதற்கு M குறி பயன்படுத்தலாம்.

(iii) இவற்றை AND முறையில் பெருக்க வேண்டும்.

(iv) இவ்வாறு கிடைக்கும் சமன்பாடு ஒழுங்குமுறை வடிவத்தில் (Canonical form of PoS) இருக்கும். இதில் உள்ள ஒவ்வொரு OR

தொகுதியிலும் எல்லா உள்ளீடு மாறிகளும் இடம் பெறும். இதன் வடிவம் $Y = M_1.M_2.M_3$

(v) பெறப்பட்ட சமன்பாட்டை பூலியன் விதிகள் கொண்டு முடிந்தவரை சுருக்கமாக எழுதவேண்டும். இவ்வாறு சுருக்கமாகத் தரப்படும் சமன்பாடு பொதுவாக, வழக்கமுறை வடிவம் (Standard PoS form) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : 3

நாம் ஏற்கனவே பார்த்த எடுத்துக்காட்டுகளையே மீண்டும் பார்க்கலாம். இதன்மூலம் இரண்டு முறைகளின் - (i) பெருக்கலை கூட்டுதல் மற்றும் (ii) கூட்டலை பெருக்குதல் வழிமுறைகளை ஒப்பிடுவது எளிது, கற்றலை வலுப்படுத்தும் வழி இது!

- இரண்டு உள்ளீடுகள் (A, B) உடைய OR வாயிலின் மெய்பட்டியலை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

A	B	Y	அடிப்படை கூட்டல்
0	0	0	$A + B = M_0$
0	1	1	-
1	0	1	-
1	1	1	-

- இங்கு ஒரே ஒரு அடிப்படை கூட்டல் தொகுதிதான் உள்ளது.
- எனவே, $\boxed{Y = A + B}$. இது OR வாயிலின் தர்க்க விதி என்பது நமக்குத் தெரியும்.

எடுத்துக்காட்டு : 4

நாம் ஏற்கனவே பெருக்கலை கூட்டுதல் முறையில் பார்த்த மெய்பட்டியலை இங்கே எழுதலாம்.

A	B	C	Y	அடிப்படை கூட்டல்
0	0	0	0	$(A+B+C)=M_0$
0	0	1	0	$(A+B+\overline{C})=M_1$
0	1	0	1	-
0	1	1	1	-
1	0	0	0	$(\overline{A}+B+C)=M_4$
1	0	1	1	-
1	1	1	0	$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})=M_6$

- இதில் நான்கு அடிப்படை கூட்டல் தொகுதிகள் (Maxterms) அல்லது உள்ளன. அவை M_0, M_1, M_4, M_6.
- இவற்றை AND வாயில் கொண்டு பெருக்கினால், நமக்கு மெய்பட்டியலுக்கான Y கிடைக்கும்.

எனவே,

$$Y = M_0.M_1.M_4.M_6$$

$$= \Pi(0,1,4,6)$$

$$=(A+B+C).(A+B+\overline{C})\,.(\overline{A}+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

- இவ்வாறு கூட்டலை பெருக்குதல் முறை மூலம் தர்க்க சமன்பாட்டை பெறமுடியும். இது ஒழுங்கு முறை வடிவத்தில் உள்ளது.
- இதனை பூலியன் விதிகள் கொண்டு சுருக்கி எழுதலாம்.

எனவே,

$$Y=(A+B+C).(A+B+\overline{C}).(\overline{A}+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$
\begin{aligned}
&= (AA + AB + A\overline{C} + BA + BB + B\overline{C} + CA + CB \\
&\qquad + C\overline{C}).(\overline{A}\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C + B\overline{A} + B\overline{B} + BC + C\overline{A} + C\overline{B} + CC) \\
&= (A + AB + A\overline{C} + B + B\overline{C} + AC + BC).\ (\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + \overline{A}B + BC + \overline{A}C + \overline{B}C + C) \\
&= [A(1 + B + \overline{C} + C) + B(1 + \overline{C} + C)].\ [A(1 + \overline{B} + \overline{C} + B + C) + C(B + \overline{B} + 1)] \\
&= (A + B).(\overline{A} + C) && (1 + A = A) \\
&= A\overline{A} + AC + B\overline{A} + BC && (A\overline{A} = 0) \\
&= \overline{A}B + AC + BC
\end{aligned}
$$

- இந்த இடத்தில் நாம் நிறுத்தினால், இத்தர்க்க சுற்றை உருவாக்க நமக்கு ஒரு NOT, மூன்று AND, இரண்டு OR வாயில்கள் தேவை. இதை இன்னமும் சுருக்கப் பார்க்கலாம்.

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}B + AC + BC \\
&= \overline{A}B + AC + BC(A + \overline{A}) && (A.1 = A) \\
&= \overline{A}B + AC + BCA + BC\overline{A} && (A + \overline{A} = 1) \\
&= \overline{A}B + \overline{A}BC + AC + ABC && (1 + A = A) \\
&= \overline{A}B(1 + C) + AC(1 + B) \\
&= \overline{A}B + AC
\end{aligned}
$$

- இப்போது நமக்கு ஒரு NOT வாயிலும், இரண்டு AND வாயில்களும், ஒரு OR வாயிலும் (மொத்தம் நான்கு வாயில்களே) தேவை.

- மேலும் பெருக்கலை கூட்டுதல் முறையில் கிடைத்த தர்க்க சமன்பாடே, இந்த வழியாகவும் பெறப்பட்டுள்ளது.

- இதன் மூலம், இரண்டு முறைகளின் மூலமும் ஒரே சமன்பாட்டை பெற இயலும் என்பது நிருபிக்கப்பட்டது.

- கூட்டலை பெருக்குதல் முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டை நம்மால் பெருக்குதல் கூட்டுதல் முறையில் எழுத முடியும். இதற்கு, கூட்டலை பெருக்குதல் முறை சமன்பாட்டில் உள்ள அடிப்படை கூட்டலை எழுத வேண்டும். இவற்றைக் கொண்டு மெய்பட்டியல் தயாரிக்க வேண்டும்.

- மெய்பட்டியலில் உள்ள அடிப்படை பெருக்கல்களை தனியே எழுத வேண்டும்.
- இவற்றை கூட்டினால், பெறும் சமன்பாடு பெருக்கலை கூட்டுதல் வடிவத்தை கொண்டிருக்கும்.

நினைவில் கொள்க :

சுருக்கமாக எழுதப்பட்ட சமன்பாட்டை விரித்து, ஒழுங்குமுறை வடிவில் எழுத இயலும். எடுத்துக்காட்டு 1ல் $Y = A + B$ என்பதை தருவிக்க மேற்கொண்ட வழிமுறையை கீழிருந்து மேலாக மேற்கொண்டால், அதன் ஒழுங்குமுறை வடிவம் பெறலாம். $A + \overline{A} = 1$ மற்றும் $A\overline{A} = 0$ ஆகிய நிபந்தனைகள் இதற்கு அதிகம் பயன்படும்.

பயிற்சி 5.1

$f(A,B,C) = \Pi(1,5,7)$ என்பதை பெருக்கலை கூட்டுதல் வடிவ சமன்பாடாக எழுது.

விடை

$$f(A,B,C) = \Pi(1,5,7)$$

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் M_1, M_5, M_7 ஆகிய பெருமக்கூறுகள், $Y = 0$ எனும் வெளியீடு தருபவை.
- எனவே, பிற உள்ளீடுகள் $Y = 1$ தரும் என்பது இதிலிருந்து தெரிகிறது.
- மெய்ப்பட்டியல் இட்டு அடிப்படை பெருக்கல்களை தருவிக்க முடியும்.
- இதன் அடிப்படை பெருக்கல்கள் (சிறுமக் கூறுகள்) : m_0, m_2, m_3, m_4, m_6
- எனவே $Y = f(A,B,C) = m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6$

$$= \Sigma(0,2,3,4,6)$$
$$= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}.\overline{C} + AB\overline{C}$$

என்பது பெருக்கலை கூட்டுதல் வடிவ விடை. இங்கே மூன்று விதமாக விடை எழுதப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 5.2

(0, 2, 4) என்பது ஒரு மெய்பட்டியலின் பெருமக்கூறுகள். இதன் சிறுமக் கூறுகளை கண்டுபிடி. இவற்றுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை எழுது.

விடை

தரப்பட்டுள்ள பெருமக் கூறுகள் : (0, 2, 4). இங்கே விடுபட்ட மதிப்புகளே இதன் மெய்பட்டியலின் சிறுமக்கூறுகள். எனவே, (1,3,5,6,7) என்பதே சிறுமக்கூறுகள். மேலும் இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு :

$Y = F(A,B,C) = \sum(1,3,5,6,7) = \Pi(0,2,4)$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.3

$Y = A + BC$ என்பதை ஒழுங்குமுறை கூட்டலை பெருக்கல் (Canonical POS form) வடிவில் எழுது.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு வழக்கமுறை வடிவில் உள்ளது.
- முதலில் இதை பெருக்கலை கூட்டுதல் வடிவில் எழுதலாம்.

$$Y = A + BC$$
$$= (A+B).(A+C)$$

- அடுத்து, எல்லாக் கூட்டல் தொகுதிகளிலும் அனைத்து மாறிகளும் இருக்கும்படி செய்யலாம். அதற்கு 0 என்பதை ஒவ்வொன்றிலும் கூட்டினால், மதிப்பு மாறாது என்பது நமக்குத் தெரியும். மேலும், $A\overline{A} = B\overline{B} = C\overline{C} = 0$ என்பதையும் அறிவோம்.

எனவே,

$$Y = (A+B).(A+C)$$
$$= (A+B+C\overline{C}).(A+B\overline{B}+C)$$

$$= [(A+B+C).(A+B+\overline{C})].[(A+B+C).(A+\overline{B}+C)]$$

$$= (A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+B+C).(A+\overline{B}+C) \qquad (\because A.A = A)$$

$$= (A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C)$$

$$= [A+BC = (A+B).(A+C)]$$

$$\boxed{Y = (A+B+C).(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C)}$$

எனும் சமன்பாட்டில், ஒவ்வொரு கூட்டல் தொகுதியிலும், A, B, C மூன்றும் (நேராகவோ, தலைகீழாகப் புரண்டோ) உள்ளன.

- இது ஒழுங்குமுறை கூட்டலை பெருக்குதல் வடிவில் உள்ளது.

பயிற்சி 5.4

தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலில் Fன் சமன்பாடு என்ன?

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$(a) AB + BC + CA$ $\qquad$ $(b) \overline{A}B + A\overline{C} + \overline{B}C$

$(c) \overline{C}.\overline{A}\overline{B} + A\overline{B}$ $\qquad$ $(d) \overline{C}(A+\overline{B}) + A\overline{B}$

விடை

பெருக்கலை கூட்டுதல் முறையில் F ஐ எழுதலாம்.

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A\overline{B}.\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$= (\overline{A} + A)\overline{B}.\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$= \overline{B}.\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} \qquad \overline{A} + A = 1$$

$$= \overline{B}(\overline{C} + AC) + AB\overline{C}$$

$$= \overline{B}(\overline{C} + A) + AB\overline{C} \qquad A + \overline{A}B = A + B$$

$$= \overline{B}.\overline{C} + A\overline{B} + AB\overline{C}$$

$$= \overline{B}.\overline{C} + A(\overline{B} + B\overline{C})$$

$$= \overline{B}.\overline{C} = A(\overline{B} + \overline{C})$$

$$= \overline{B}.\overline{C} + A\overline{B} + A\overline{C}$$

$$= \overline{C}(A + \overline{B}) + A\overline{B}$$

சரியான விடை : (d)

பயிற்சி 5.5

ஒரு டிஜிட்டல் சுற்றின் உள்ளீடுகள் A,B,C ஆகும். தரப்பட்டுள்ள உள்ளீடுகளுக்கு $Y = 0$ என்றும், பிறவற்றிற்கு $Y = 1$ எனில், அத்தகைய சுற்று எது?

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0

விடை

- தரப்பட்ட உள்ளீட்டு பட்டியலுக்கு, $Y = 0$
- எனவே, இதனை கூட்டலை பெருக்குதல் முறையில் எழுதினால் நமக்குக் கிடைப்பது,

$$Y = (A + B + C).(A + B + \overline{C}).(A + \overline{B} + C) \qquad (A + B).(A + C) = A + BC$$

$$= (A + B + C\overline{C}).(A + \overline{B} + C) \qquad AA = A$$
$$= (A + B)(A + \overline{B} + C) \qquad A + 1 = A$$
$$= AA + A\overline{B} + AC + BA + B\overline{B} + BC$$
$$= A + A\overline{B} + AC + AB + BC$$
$$= A[1 + \overline{B} + C + B] + BC$$
$$= A + BC$$

சரியான விடை : (d)

5.4 கார்ணா வரைபடம் என்றால் என்ன?

தர்க்க சமன்பாட்டை சுருக்கமாக எழுத உதவும் ஒரு முறை கார்ணா வரைபடம் ஆகும். மெய்ப்பட்டியலை இரு பரிமாண வடிவில் விளக்கும் வரைபடம் இது. ‘n’ எண்ணிக்கை மாறிகள் (உள்ளீடுகள்) உடைய ஒரு மெய்ப்பட்டியலை 2^n கட்டங்கள் (cells) உடைய கார்ணா வரைபடத்தால் விவரிக்கலாம். சிறுமக்கூறு (அல்லது பெருமக்கூறு) மதிப்புகளை இந்தக் கட்டங்களில் நிரப்பி, அதன்மூலம் கார்ணா வரைபடத்தைக் கொண்டு சமன்பாடுகளை சுருக்க இயலும்.

5.5. கார்ணா வரைபட அமைப்பு

- n என்பது மாறிகள் எண்ணிக்கை எனில், 2^n கட்டங்கள் இருக்கும் என ஏற்கனவே பார்த்தோம்.

- இரண்டு மாறிகள் $(n = 2)$ உள்ள மெய்ப்பட்டியலுக்கான வரைபடம்.

$A \backslash B$	0	1
0	$\overline{A}.\overline{B}$ 0	$\overline{A}B$ 1
1	$A\overline{B}$ 2	$A\overline{B}$ 3

2 மாறிகள் K வரைபடம்

- $n = 2$ என்பதால், இதில் நான்கு $(2^2 = 4)$ கட்டங்கள் உள்ளன.

- ஒவ்வொரு கட்டமும் சிறுமக் கூறுகளை பிரதிபலிக்கின்றன.
- ‘0’ எண்ணுள்ள கட்டம் $\overline{A}.\overline{B}(00)$ என்பதை குறிக்கிறது. மேலும், இது m_0 சிறுமக்கூற்றின் இடமாகும்
- ‘1’ எண்ணுள்ள கட்டம் $\overline{A}B(01)$ என்பதை குறிக்கிறது. m_1 சிறுமக்கூற்றின் இடம். இது
- ‘2’ எண்ணுள்ள கட்டம் $A.\overline{B}(10)$ என்பதை குறிக்கிறது. m_2 வின் இடம் இது.
- ‘3’ எண்ணுள்ள கட்டம் $AB(11)$ என்பதை குறிக்கிறது. சிறுமக்கூறு m_3 யின் இடம் இது.
- மாறிகளின் இடத்தை மாற்ற வேண்டாம்.
- $n=3$ எனில், $2^n=8$ என்பதால், மூன்று மாறிகள் (உள்ளீடுகள் $=A,B,C$) உடைய ஒரு மெய்ப்பட்டியலுக்கான K வரைபடத்தில் எட்டு கட்டங்கள் இருக்கும்.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ 0	$\overline{A}.\overline{B}.C$ 1	$\overline{A}.BC$ 3	$\overline{A}B\overline{C}$ 2
1	$AB\overline{C}$ 4	$A\overline{B}C$ 5	ABC 7	$AB\overline{C}$ 6

3 மாறிகள் K வரைபடம்

- இதேபோல, 4 மாறிகளுக்கும் K வரைபடம் வரையலாம். $2^n=16$ என்பதால், இதில் 16 கட்டங்கள் உண்டு. இவை 16 சிறுமக் கூறுகளுக்கான இடத்தைக் காட்டும். 0 அல்லது 1 எனும் மதிப்புகளை மட்டுமே இதில் நிரப்ப முடியும். சிக்கலான பல பூலியன் சமன்பாடுகளை சுருக்கி எழுத மிகவும் பயனுள்ள முறை இது.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$ 0	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}D$ 1	$\overline{A}.\overline{B}CD$ 3	$\overline{A}.\overline{B}C\overline{D}$ 2
01	$\overline{A}B\overline{C}.\overline{D}$ 4	$\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$\overline{A}BCD$ 7	$\overline{A}BC\overline{D}$ 6
11	$AB\overline{C}.\overline{D}$ 12	$AB\overline{C}D$ 13	$ABCD$ 15	$ABC\overline{D}$ 14
10	$A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$ 4	$A\overline{B}.\overline{C}D$ 9	$A\overline{B}CD$ 11	$A\overline{B}C\overline{D}$ 10

4 மாறிகள் K வரைபடம்

5.6 கார்ணா வரைபடத்தின் முக்கியப் பண்புகள்

- கார்ணா வரைபடம் சிக்கலான சமன்பாடுகளை தீர்க்கவும், மதிப்பீடு காணவும், அவற்றை சுருக்கி எழுதவும் பயன்படும் மிக முக்கிய முறை என நாம் அறிவோம்.
- இந்த வரைபடம் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ள விதத்தினால்தான், இத்தகைய வழியில் பலன் அளிக்கிறது.
- n உள்ளீடுகள் உள்ள மெய்ப்பட்டியல் என்றால், அதன் கார்ணா வரைபடத்தில் 2^n கட்டங்கள் இருக்கும்.
- சிறுமக் கூற்றின் மதிப்பு '1' எனில், வரைபடத்தில் அதற்குரிய கட்டத்தில் எழுதவேண்டும். பிற கட்டங்கள் கட்டங்கள் '0'வால் நிரப்பப்படும்.
- பெருக்கலை கூட்டுதல் (SOP) முறையில் K வரைபடத்தை பயன்படுத்தும் போது, இதில் குறியிடப்பட்டுள்ள '1' தர்க்க மதிப்புகளை ஒன்றாகத் தொகுக்க வேண்டும்.
- கூட்டலை பெருக்குதல் (POS) முறையில் K வரைபடத்தை கையாளும்போது, அதில் உள்ள '0' மதிப்புகளை தொகுக்க வேண்டும்.

- பூலியன் விதிகளையும் நிபந்தனைகளும் செலுத்தி வரும் விடையும் K வரைபடம் கொண்டு கிடைக்கும் விடையும் சமம்.

- SOP முறையில் பெறும் விடை POS முறையில் பெறும் விடைக்குச் சமம்.

- K வரைபடத்தில், நாம் இடமிருந்து வலமாகவோ, மேலிருந்து கீழாகவோ நகரலாம். அல்லது வலமிருந்து. இடப்புறமும், கீழிருந்து. மேல் நோக்கி நகரவும் அனுமதி உண்டு. சாய்வாக (Diagonal) நகர்தல் கூடாது. வரைபடத்தை சுருட்டுதல், மடக்குதல் ஆகியன அனுமதிக்கப்பட்டுள்ளன.

5.6.1 ***கார்ணா வரைபடத்தை பயன்படுத்தும் முறை***

- அடுத்தடுத்து உள்ள இரண்டு கட்டங்கள் குறிக்கும் (சிறுமக் கூறுகளின்) இடமதிப்புகளை கவனித்தால், **ஒரே ஒரு** உள்ளீடு (மாறி) மட்டுமே தலைகீழாக புரண்டிருக்கும் என்பது புரியும். இதுதான் இந்த வரைபடத்தை மிகப் பயனுள்ளதாக ஆக்கும் பண்பு என்று கூறலாம்.

- எட்டு கட்டங்கள் உடைய கார்ணா வரைபடத்தில் முதல் வரிசையை எடுத்துக் கொள்ளலாம். $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ என்பதற்கு அடுத்து, அதே வரிசையில் $\overline{A}.\overline{B}.C$ உள்ளது. இரண்டிற்கும் உள்ள வேறுபாடு $\overline{C}$ என்பது C என ஆகியுள்ளது மட்டுமே. அதற்கடுத்த கட்டத்தில் $\overline{A}BC$ உள்ளது. மீண்டும் ஒரே ஒரு உள்ளீடு (இங்கே $\overline{B}$ என்பது B யாக) மட்டுமே புரண்டுள்ளது. அதற்கடுத்த கட்டத்திலும் இந்தப் பண்பை பார்க்கலாம். அதில் $\overline{A}$ மற்றும் B மாறாமல் உள்ளன. ஆனால் C உள்ளீடு $\overline{C}$ என தலைகீழாக மாறியுள்ளது. மேலிருந்து கீழே வருகையிலும், இப்பண்பை காணலாம். இது போன்றே 4 கட்ட, 16 கட்ட, 32 கட்ட கார்ணா வரைபடங்களிலும் இருக்கும்).

- கார்ணா வரைபடத்தில் அடுத்த கட்டத்தை நோக்கி பயணிக்கையில், ஒரே ஒரு உள்ளீடு புரண்டுள்ளதால், $A+\overline{A}=1$ எனும் OR விதிப்படி

இதனை சுருக்கி எழுதுவது சுலபமாகிறது. $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}=1$ மற்றும் $\overline{A}BC=1$ என ஒரு மெய்பட்டியல் காண்பிக்கிறது என்று கொள்ளலாம். எனவே, $\overline{A}C(\overline{B}+B)=\overline{A}C.1$ என்று பூலியன் விதிப்படி சுருக்கலாம்.

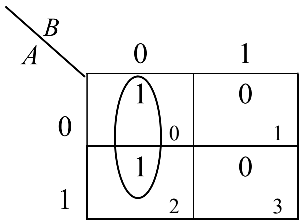
- கார்ணா வரைபடத்தில், இவை அடுத்தடுத்த கட்டங்களில் '1' எனும் தர்க்க மதிப்புடன் காட்டப்படும். ஏனெனில் m_1 க்கு அடுத்த கட்டம் m_3 யை குறிக்கும். வரைபடத்தில் இடமிருந்து வலமாகவோ, வலமிருந்து இடமாகவோ நகர்ந்தாலும், அடுத்தடுத்து '1' எனும் குறியீடு இருக்கும் $(m_1 = m_3 = 1)$.
- கார்ணா வரைபடம் மூலம் சுருக்கும் முறையில், அடுத்தடுத்த கட்டங்களில் '1' மதிப்பு இருக்குமானால், அக்கட்டங்கள் குறிக்கும் சிறுமக்கூறு தர்க்கத்தில் புரண்டுள்ள உள்ளீட்டை விலக்க வேண்டும். **தலைகீழாக புரளும் உள்ளீட்டை விலக்கு** என இதை எளிதாக நினைவில் வைக்கலாம்.
- இங்கே $m_1 = m_3 = 1$ இவற்றின் தர்க்கம் $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$ மற்றும் $\overline{A}BC$ இவற்றில் புரண்டுள்ள உள்ளீடு B ஆகும். இதை விலக்கினால், நமக்குக் கிடைப்பது $\overline{A}C$. இவ்வாறு எளிதாக சமன்பாட்டை சுருக்க முடியும்.
- இணை (pair), நான்மணி (quad), எட்டுத்தொகை (octet) என தர்க்க மெய்களை (1) தொகுத்து K வரைபடம் மூலம் தர்க்க சமன்பாட்டை சுருக்கி எழுதலாம். X எனும் பொருட்படுத்தாத நிலைகள் வரைபடத்தில் உண்டு.
- தேவையான இடங்களில் இந்தத் தொகுதிகளை பிணைக்கலாம். இதனை **தொகுதிப் பிணைப்பு** என்கிறோம் (overlapping of groups).
- முடிந்தவரை பெரிய தொகுதிகளை உருவாக்க முயல வேண்டும். இதன் மூலம் அதிக எண்ணிக்கையில் மாறிகளை குறைக்க இயலும்.
- **மடிப்பதன் மூலம்** (fold or roll) தொகுதிகளை உருவாக்கலாம்.
- **மிகையான** (redundant groups) தொகுதிகளை உருவாக்குதல் கூடாது.

நினைவில் கொள்க :

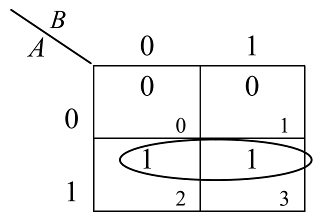
மெருமக் கூறுகள் கொண்டு, கூட்டலை பெருக்கல் முறையிலும் விடை காண முடியும்.

5.7 இணை (Pair)

- கார்ணா வரைபடத்தில், அடுத்தடுத்து உள்ள மெய் = 1 மதிப்புகள் ‘இணை’ (Pair) எனப்படும்.

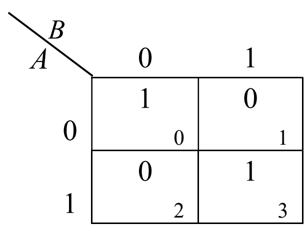


படம் 5.7.1



படம் 5.7.2

- கிடைமட்டமாகவோ, செங்குத்தாகவோ உள்ள ‘1’களை இணைக்கலாம்.
- ஒரு இணையை உருவாக்குவதன் மூலம், ஒரு மாறியை (உள்ளீடு) குறைக்கலாம்.
- இணையின் குறியீடு P ஆகும்.
- சாய்வான கோணத்தில் (diagonal) உள்ள மெய்கள் இணையாக முடியாது.



படம் 5.7.3

- மேலே உள்ள வரைபடங்களுக்கான தர்க்கத்தை பார்க்கலாம். படம் 5.7.1ன் சமன்பாடு $Y = \overline{B}$; படம் 5.7.2ன் சமன்பாடு $Y = A$; படம் 5.7.3ன் தர்க்க சமன்பாடு $Y = \overline{A}.\overline{B} + AB$. இந்த விடைகளை எப்படி தருவிப்பது என அடுத்து பார்க்கலாம்.

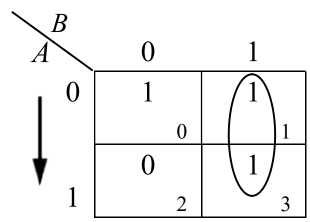
நினைவில் கொள்க :

பெருமக் கூறுகள் கொண்டு K வரைபடத்தை சுருக்கும் போது அடுத்தடுத்து உள்ள 0 மதிப்பை இணையாக மாற்றலாம். கூட்டல் மூலம் பெருக்கல் முறையை விடை காண பயன்படுத்த வேண்டும்.

5.7.1 இணை மூலம் சுருக்குதல்

ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் இதனை புரிந்து கொள்ளலாம்.

- எடுத்துக்காட்டு



- இதில் P(1,3) எனும் ஒரு இணையை உருவாக்கலாம். எனவே ஒரு உள்ளீட்டை குறைக்க முடியும்.
- மேலிருந்து கீழாக (கீழிருந்து மேலாகவும் நகரலாம்) நகர்கையில், $\overline{A}B$ மற்றும் AB ஆகிய அடுத்தடுத்த கட்டங்கள் '1' மதிப்போடு உள்ளன. இந்த இணையில், மேலிருந்து கீழ்நோக்கி வந்தால், B அப்படியே இருக்கிறது. ஆனால் A என்பது $\overline{A}(0)$ என்ற நிலையிலிருந்து $A(1)$ எனப் புரள்கிறது.
- எனவே, தலைகீழாகப் புரளும் A உள்ளீடு விலக்கப்படும்.
- இதனால், தரப்பட்டுள்ள K வரைபடம் மூலம் நாம் பெறும் தர்க்க சமன்பாடு

$$\boxed{Y = B}$$

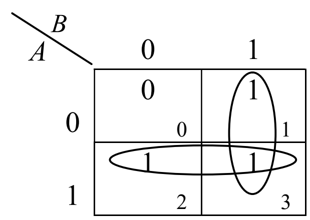
பயிற்சி 5.6

தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலை K வரைபடமாக மாற்றி, அதில் உள்ள இணைகளைக் குறியிடு.

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

விடை

- தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலில் உள்ள சிறுமக் கூறுகள் : m_1, m_2, m_3
- $2^2 = 4$ கட்டங்களை பெற்றிருக்கும் இதன் K வரைபடம் இதோ,



- $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ என்பதால் அந்தக் கட்டங்களை '1' என நிரப்ப வேண்டும்.
- மீதியுள்ள கட்டத்தில் 0 நிரப்ப வேண்டும்.
- இதில் இரண்டு இணைகள் உள்ளன.
- மேலிருந்து கீழ்நோக்கி பெறப்பட்டுள்ள இணை மூலம் கிடைக்கும் தர்க்கம் B இங்கே $\overline{A}$ விலக்கப்பட்டது.
- இடமிருந்து வலமாகச் செல்லும் இணையில், B விலக்கப்பட்டுள்ளது. இது தரும் மதிப்பு A ஆகும்.
- '+' கொண்டு இவற்றை இணைக்கலாம்.
- இந்த வரைபடத்தின் மூலம் பெறப்படும் விடை

$$\boxed{Y = B + A}$$

- இது OR வாயிலின் தர்க்கம் என்பதை நாம் அறிவோம்.

பயிற்சி 5.7

.

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

இது XOR வாயிலின் தர்க்க மெய்ப்பட்டியல், இதற்கான K வரைபடம் வரைந்து, தர்க்க சமன்பாட்டை கண்டுபிடி.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலின் சமன்பாட்டை, பெருக்கலை கூட்டுதல் முறையில் K வரைபடம் கொண்டு வகுக்கலாம்.
- மெய்ப்பட்டியலின் சிறுமக் கூறுகள் :

$$m_1 = \overline{A}B$$
$$m_2 = A\overline{B}$$

- இதன் K வரைபடம்

$A \backslash B$	0	1
0	1 $_{0}$	0 $_{1}$
1	0 $_{2}$	1 $_{3}$

- இதில் இணைகள் இல்லை. எனவே. சுருக்க இயலாது. இவற்றை OR மூலம் கூட்டினால் வருவதே விடை.
- எனவே தரப்பட்டுள்ள மெய்ப்பட்டியலின் தர்க்கம்.

$$\boxed{Y = \overline{A}B + A\overline{B}}$$

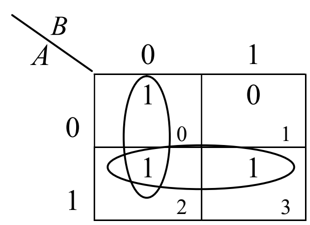
பயிற்சி 5.8

தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தின் தர்க்க சமன்பாட்டை கண்டுபிடி. இதற்கு மெய்பட்டியல் இட்டு, பூலியன் விதிப்படியும் தர்க்க சமன்பாட்டை எழுது. இரண்டையும் ஒப்பிடு.

$A \backslash B$		
	1	0
	1	1

விடை

- தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்திலிருந்து நமக்குக் கிடைக்கும் சிறுமக் கூறுகள் m_0, m_2, m_3.
- இதில் உள்ள இணைகள் இரண்டு.



- முதல் இணையில் மேலிருந்து கீழ்நோக்கி நகர்ந்தால், A மாறுகிறது. அதை கைவிடலாம்.
- எனவே, நமக்குக் கிடைக்கும் தர்க்கம் $\overline{B}$ ஆகும்.
- அடுத்த இணையில், இடமிருந்து வலம் செல்கையில், B புரள்கிறது. மாறாமல் அதில் இருப்பது A.
- எனவே, இந்த K வரைபடத்தின் தர்க்கம் $\boxed{Y = A + \overline{B}}$.
- தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தின் மெய்ப்பட்டியல் இதோ:

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

- இதிலிருந்து பெறப்படும் சமன்பாட்டை பூலியன் விதிகள் கொண்டு சுருக்கி எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}
Y &= \overline{A}.\overline{B} + A\overline{B} + AB \\
&= \overline{A}.\overline{B} + A\overline{B} + A\overline{B} + AB && \because A + A = A \\
&= (\overline{A} + A)\overline{B} + A(\overline{B} + B) \\
&= 1.\overline{B} + A.1 && \overline{B} + B = 1 \\
&= \overline{B} + A && 1.A = A \\
&\boxed{Y = A + \overline{B}}
\end{aligned}$$

- K வரைபடத்தின் மூலம் பெற்ற சமன்பாடும், பூலியன் முறையில் தருவித்த சமன்பாடும் ஒன்றாக உள்ளது.

பயிற்சி 5.9

$F(A,B,C) = \sum(1,6,7)$ என்பதன் சமன்பாட்டை K வரைபடம் மூலம் கண்டுபிடி

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$F(A,B,C) = \sum(1,6,7)$

- இதன் சிறுமக்கூறுகள்: m_1, m_6, m_7
- இந்த இடங்களைத் தவிர பிற இடங்களின் மதிப்பு 0. எனவே, இதன் K வரைபடத்தை இவ்வாறு வரையலாம்.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0_{0}	1_{1}	0_{3}	0_{2}
1	0_{4}	0_{5}	1_{7}	1_{6}

- இதில் ஒரே ஒரு இணை $P(6,7)$ மட்டுமே உள்ளது. இந்த இணையில் C என்பது $\overline{C}$ என புரள்வதால், அதனை விலக்கலாம். இந்த இணையில் மாறாமல் மீதம் இருப்பது B மட்டுமே. ஆனால், இணை A வரியில் உள்ளது. எனவே, Aவோடு சேர்த்தே இதன் மதிப்பை காணவேண்டும். அதனால் இணையின் மூலம் கிடைக்கும் தர்க்கம் AB என்றாகும்.
- $\overline{A}.\overline{B}.C$ தனியாய் நிற்கிறது. எனவே, இதை சுருக்க இயலாது.
- இவற்றின் மூலம் நாம் பெறும் தர்க்க சமன்பாடு

$\boxed{Y = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + AB}$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.10

$Y = \sum(2,6)$ என்பதற்கான சமன்பாட்டை படிப்படியாய் பூலியன் விதிகள் மூலம் தருவி. K வரைபடம் மூலம் வரும் விடை இதற்குச் சமம் என்பதை நிறுவு.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$Y = \sum(2,6)$$

- $m_2 = m_6 = 1$
- $m_2 = \overline{A}B\overline{C}$ & $m_6 = AB\overline{C}$ என்பதால்,

$$\begin{aligned} Y &= \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} \\ &= (\overline{A} + A)B\overline{C} \\ &= B\overline{C} \end{aligned}$$

மேலும், இதன் K வரைபடம்

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0_{0}	0_{1}	0_{3}	1_{2}
1	0_{4}	0_{5}	0_{7}	1_{6}

- இதில் ஒரு இணை இருப்பதால், ஒரு உள்ளீட்டை குறைக்க முடியும்.
- இணையில் Aவின் இடமதிப்பு 0விலிருந்து 1 என, அதாவது $\overline{A}$ என்பது A என்று தலைகீழாகப் புரண்டுள்ளது. எனவே அதை விட்டுவிட்டு, இணையில் உள்ள பிறவற்றை விடையாக எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\boxed{Y = B\overline{C}}$$

- பூலியன் விதி கொண்டு படிப்படியாக சுருக்கினாலும், K வரைபடத்தால் சுருக்கினாலும் நாம் பெறும் விடை ஒன்றே என்பது இதன் மூலம் நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 5.11

இரண்டு உள்ளீடுகள் உடைய K வரைபடத்தில் எல்லா கட்டங்களும் '1' எனில், அதன் தர்க்க சமன்பாடு என்ன?

விடை

- எல்லா கட்டங்களும் 1 எனில், சமன்பாடு $Y=1$ என்றாகிறது. அத்தனைய ஒரு டிஜிட்டல் சுற்றின் வெளியீடு அதன் உள்ளீடுகளை பொறுத்து மாறுவதில்லை.
- எப்போதுமே $\boxed{Y=1}$ என்று இருக்கும்.

5.8 நான்மணி (QUAD)

- ஒரு கார்ணா வரைபடத்தில், நான்கு மெய்=1 அடுத்தடுத்து இருக்குமானால், அத்தகைய தொகுப்பை நான்மணி (Quad) என அழைக்கிறோம்.
- இணையைப் போலவே, இதுவும் கிடைமட்டமாகவோ, செங்குத்தாகவோ இருக்கலாம். இரண்டு இணைகளை மேலும் கீழும் வைத்ததுபோல, சதுர அமைப்பிலும் நான்மணி இருக்க முடியும்.
- எடுத்துக்காட்டுகள்

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

படம் 5.8.1 கிடை நான்மணி

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

படம் 5.8.1 சதுர நான்மணி

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

படம் 5.8.3 நெடு நான்மணி

- ஒரு நான்மணி என்பது இரண்டு இணைகளின் தொகுதி என்பதால், இதன் மூலம் இரண்டு உள்ளீடுகளை குறைக்க முடியும்.

- சாய்வான கோணத்தில் நான்மணிகளை உருவாக்கக் கூடாது.

- Q என்பது நான்மணியின் (QUAD) குறியீடு.

- இங்கு படம் 5.8.1ல் 'கிடை நான்மணி' $Q(0,1,2,3)$ காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் B மற்றும் C இரண்டுமே புரண்டு விடுகின்றன. எனவே, இவை இரண்டும் விலக்கப்படும். அதன் $Y=\overline{A}$

- பூலியன் விதிகொண்டு இதை புரிந்து கொள்ளப் பார்த்தால்,

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}\\
&= \overline{A}.\overline{B}(\overline{C}+C)+\overline{A}B(C+\overline{C})\\
&= \overline{A}.\overline{B}.1+\overline{A}B.1\\
&= \overline{A}.\overline{B}+\overline{A}B\\
&= \overline{A}(\overline{B}+B)\\
&= \overline{A}
\end{aligned}
$$

எனவே $\overline{A}$ மட்டுமே இங்கு மிஞ்சி இருக்கிறது. அதனால், $Y=\overline{A}$

- அடுத்துள்ள படம் 5.8.2 'சதுர நான்மணி'க்கான எடுத்துக்காட்டு. இதில் இடமிருந்து வலமாக நகர்கையில் C மாறாமல் இருக்கிறது. ஆனால் $\overline{B}$ என்பது Bயாக புரள்கிறது. அடுத்து, இந்த நான்மணிக்குள் மேலிருந்து கீழ்நோக்கி நகர்ந்தால், $\overline{A}$ என்பது Aவாக மாறுவதை நாம் கவனிக்கலாம். எனவே, இதுவும் விலக்கப்படும். எனவே, இந்த $Q(1,3,5,7)$ எனும் சதுர நான்மணி மூலம் நாம் பெறும் விடை $Y=C$.

- படம் 5.8.3 ஒரு 'நெடு நான்மணியை' விளக்க உதவும். இதில் மேலிருந்து கீழ்நோக்கி நாம் பயணிக்கையில், A மற்றும் B புரள்வதை பார்க்கலாம். மாறாமல் இருப்பது CD என்பதால், $Y=CD$ என்றாகிறது.

பயிற்சி 5.12

ஒரு நான்மணியை இரண்டு வெவ்வேறு இணையாகக் கருதி சமன்பாடு எழுதுவதால் ஏற்படும் குறைபாட்டை விவரி.

விடை

- ஒரு வரைபடத்தை எடுத்துக்கொண்டு இதனை அலசலாம்.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

- மேலே தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தில் உள்ள $Q(0,1,2,3)$ எனும் நான்மணித் தொகுப்பைக் கொண்டு இரண்டு மாறிகளை (B,C) குறைக்கலாம். எனவே, இதன் சமன்பாடு

$Y = \overline{A}$ ....(1) என்றாகிறது.

- ஒருவேளை, இதனை இரண்டு தனித்தனி இணைகளாக எடுத்துக் கொண்டால்

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

- இப்போதும் நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு,

$Y = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}B$ ....(2)

- சமன்பாடு (1)ஐ ஒப்பிடுகையில், சமன்பாடு (2) விரிவாக உள்ளது. இதை மேலும் சுருக்க இயலும் என்பதால், K வரைபடத்தின் உள்நோக்கம். இந்த முறையால் நிறைவடையவில்லை.

- எனவே நான்மணியை இரண்டு தனித்தனி இணைகளாகக் கருதுவதால் சுருக்கமான சமன்பாடு கிடைக்காது.

நினைவில் கொள்க :

இந்தக் குறைபாட்டை நீக்க, நான்கு மெய்கள்=1 கொண்ட தொகுப்பை ஒரு நான்மணியாகக் கருத வேண்டும், இரண்டு இணைகளாக கருதக் கூடாது.

5.9 தொகுதி பிணைப்பு

- K வரைபடத்தில் அருகருகே இருக்கும் தொகுதிகளை பிணைத்து, அதன் மூலம் தர்க்க சமன்பாட்டை சுருக்க முடியும்.
- பிணைக்கப்படும் இரண்டு தொகுதிகளுக்கும் இடையே, குறைந்தபட்சம் ஒரு கட்டமாவது பொதுவாக இருக்கும்.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0 (0)	1 (1)	1 (3)	1 (2)
1	0 (4)	1 (5)	1 (7)	0 (6)

படம் 5.9.1

- மேலே உள்ள K வரைபடத்தில் $Q(1,3,5,7)$ எனும் ஒரு நான்மணியை உருவாக்கியபின், அதற்கு அருகே $m_2 = 1$ இருக்கிறது. இதனை $m_3 = 1$ என்பதுடன் பிணைத்தால் ஒரு இணை $P(2,3)$ உருவாகும்.
- இதில், நான்மணியின் மூலம் இரண்டு மாறிகளும் (A, B) இணையின் மூலம் ஒன்றும் (C) விலக்கப்படும்.
- மேலே உள்ள K வரைபடத்தின் சமன்பாடு,

$$\boxed{Y = C + \overline{A}B}$$

- இத்தகைய பிணைப்புகளில், தொகுதிகள் ஒன்றின்மேல் மற்றொன்று பொருந்துவது (overlapping) போல இருக்கும்.

பயிற்சி 5.13

$$F(A,B,C) = \sum(1,2,3,5,6,7)$$

என்பதன் தர்க்க சமன்பாட்டை தொகுதி பிணைப்பு முறையில் சுருக்கி வரைக.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு
    - $F(A,B,C) = \sum(1,2,3,5,6,7)$
- இதன் K வரைபடம்,

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0 $_0$	1 $_1$	1 $_3$	1 $_2$
1	0 $_4$	1 $_5$	1 $_7$	1 $_6$

- இதில் m_1, m_3, m_5, m_7 ஆகியவற்றைக் கொண்டு ஒரு நான்மணி $Q(1,3,5,7)$ உருவாக்கிய பின்னர், அதனருகே m_2, m_8 இருப்பதை பார்க்கலாம்.

- அவற்றை m_3, m_7 உடன் பிணைத்தால், மற்றொரு நான்மணி $Q(2,3,6,7)$ என்பதை உருவாக்கலாம். இந்த நான்மணி மூலம் இரண்டு மாறிகளை குறைக்க முடியும்.

- ஒருவேளை m_2, m_6 ஆகியவற்றை இணையாக மட்டுமே எடுத்துக்கொண்டால், ஒரு மாறி மட்டுமே குறையும். மேலும் இதன் மூலம் கிடைக்கும் சமன்பாட்டை எழுதினால், $Y = C + B\overline{C}$ கிடைக்கும். இதனை $Y = C + B$ என மேலும் சுருக்க வழியுண்டு. K வரைபடத்தின் உள்நோக்கம் நிறைவடையாது.

- எனவே, இரு நான்மணிகளை பிணைத்து சமன்பாடு எழுதுதல் சிறந்த வழி ஆகும்.

- முதல் நான்மணி மூலம் B மற்றும் A புரள்வதை காண முடிகிறது. எனவே அவற்றை விலக்கலாம். எனவே C மட்டுமே தங்கும்.

- இரண்டாவது நான்மணி மூலம் C மற்றும் B விலகிவிடும். இதன் மூலம் B மட்டும் மிஞ்சி இருக்கும்.

- இவற்றை OR வாயில் மூலம் இணைத்தால், நாம் பெறும் சமன்பாடு,

.

$$\boxed{Y = B + C}$$

பயிற்சி 5.14

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

என்பதன் சமன்பாட்டை எழுது.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள கார்ணா வரைபடத்தை தொகுதி பிணைப்பு முறையில் சுருக்கலாம்.

- இதில் ஒரு நான்மணியும் ஒரு இணையும் உள்ளன.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (1)	1 (3)	1 (2)
1	0 (4)	0 (5)	1 (7)	0 (6)

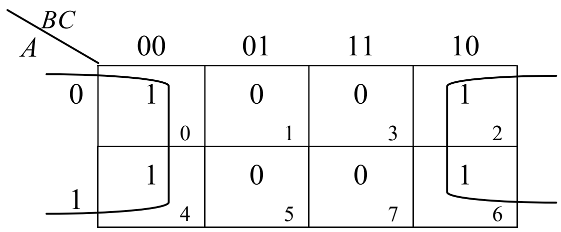
- $Q(0,1,2,3)$ நான்மணி மூலம் B, C மாறுவதை கண்கூடாகக் காணலாம். இதன் மூலம் நாம் பெறும் விடை $\overline{A}$.

- $P(3,7)$ இணை மூலம் பெறும் விடை BC.
- எனவே, தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தின் தர்க்க சமன்பாடு

$\boxed{Y = \overline{A} + BC}$ ஆகும்.

5.10 மடித்தல் அல்லது சுருட்டுதல் (Folding or Rolling)

- K வரைபடத்தைக் கொண்டு தர்க்க சமன்பாடுகளை சுருக்கி எழுதும்போது, மிக உதவியாக இருக்கும் ஒரு முறை மடித்தல் அல்லது சுருட்டுதல் (folding or rolling).
- மூன்று உள்ளீடுகளுக்கான ஒரு K வரைபடத்தை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.



படம் 5.10.1

- மேலே உள்ள வரைபடத்தில் இரண்டு இணைகள் உள்ளன. இவற்றை $Q(0,2,4,6)$ எனும் ஒரு நான்மணியாக்க உதவும் எளிய செயல்முறையே மடித்தல் என்பது.
- பக்கவாட்டில் வரைபடத்தை மடித்து, அதன் ஓரங்கள் தொடுவதைப் போல கற்பனை செய்யலாம். அப்போது, $B\overline{C}$ எனும் நெடுவரியும் $\overline{B}.\overline{C}$ என்பதும் அடுத்தடுத்து வந்துவிடும்.
- இவற்றை ஒப்பிட்டால், $\overline{C}$ அப்படியே மாறாமல் இருப்பதையும் $\overline{B}$ என்பது B யாகப் புரள்வதையும் காணலாம். எனவே, மடித்தலின் மூலம் புரளும் மாறியை விலக்கி, சமன்பாட்டை மேலும் சுருக்க முடியும் என்பது புரிகிறது.
- தரப்பட்டுள்ள வரைபடத்தின் சமன்பாடு

  $Y = \overline{C}$ ஆகும்.
- K வரைபடம் தர்க்க ரீதியில் வடிவமைப்பட்டுள்ளதால் இது சாத்தியமாகிறது.

- K வரைபடத்தை தேவைக்கேற்றபடி பக்கவாட்டிலும் மடிக்கலாம், தலைகீழாகவும் மடிக்கலாம்.

பயிற்சி 5.15

$Y = \sum(4,6,12,14,15)$ என்பதை சுருக்கி எழுதுக. K வரைபட முறையை பயன்படுத்தவும்.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$Y = \sum(4,6,12,14,15)$$

- இதன் K வரைபடம்

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (1)	0 (3)	1 (2)
01	1 (4)	0 (5)	0 (7)	1 (6)
11	1 (12)	0 (13)	1 (15)	1 (14)
10	0 (8)	0 (9)	0 (11)	0 (10)

- இங்கே ஒரு இணையும், மடித்தல் மூலம் உருவான ஒரு நான்மணியும் பிணைந்துள்ளன.

- $P(14,15)$ இணையின் மூலம் D நீக்கப்படும். இதில் கிடைக்கும் தர்க்கம் ABC.

- மடித்தல் மூலம் பெற்ற $Q(4,6,12,14)$ நான்மணியில், C என்பது $\overline{C}$ ஆக மாறுவதை பார்க்கலாம். மேலும், மேலிருந்து கீழே நகர்கையில் A புரள்கிறது. அதனால் இவற்றை விலக்கி விடலாம். மீதம் இருப்பது $B\overline{D}$ மட்டுமே.

- இவற்றை OR வாயில் கொண்டு இணைத்தால் வரும் சமன்பாடு

$$\boxed{Y = ABC + B\overline{D}}$$

பயிற்சி 5.16

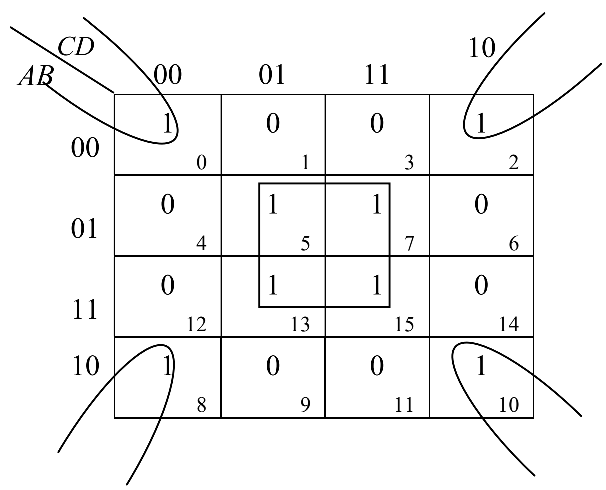
$Y = \sum(0,2,5,7,8,10,13,15)$ என்பதை K வரைபடம் மூலம் சுருக்கி எழுதுக.

விடை :

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$Y = \sum(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

இதன் K வரைபடம்



- வரைபடத்தில் $Q_1(5,7,13,15)$ எனும் முதல் நான்மணி தெளிவாகத் தெரிகிறது. இதன் மூலம் கிடைக்கும் தர்க்கம் BD.

- வரைபடத்தை உற்றுநோக்கி கவனித்தால், அதன் ஓரங்களில் நான்கு '1' உள்ளன என்பது தெரியும். மடித்தல் முறையை பயன்படுத்தி, வரைபடத்தை பக்கவாட்டிலும் தலைகீழாகவும் மடித்தால், பூ மொட்டு போல எல்லா 1 = மெய்களும் அடுத்தடுத்து இருப்பதை கற்பனை செய்யலாம்.

- இவ்வாறு மடித்தல் மூலம் நாம் பெறும் நான்மணி $Q_2(0,2,8,10)$ ஆகும். இதன் சிறுமக் கூறுகள் : $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}, \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D}, A\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$ மற்றும் $A\overline{B}C\overline{D}$

- இந்த $Q_2(0,2,8,10)$ நான்மணி மூலம் C புரள்வதையும், A புரள்வதையும் கவனிக்கலாம். இவை விலக்கப்பட்டு, நம்மிடம் தங்கும் தர்க்கம் $\overline{B}.\overline{D}$ ஆகும்.

- இவற்றை OR வாயில் மூலம் தொகுத்தால், வரும் சமன்பாடு

$$\boxed{Y = BD + \overline{B}.\overline{D}}$$

- இது $XNOR$ சமன்பாடு.

5.11 எட்டுத்தொகை (OCTET)

- எட்டு மெய்=1களின் தொகுப்பை எட்டுத்தொகை (OCTET) என அழைக்கிறோம்.

- இரண்டு நான்மணிகள் இணைந்து ஒரு எட்டுத்தொகையை உருவாக்கும்.

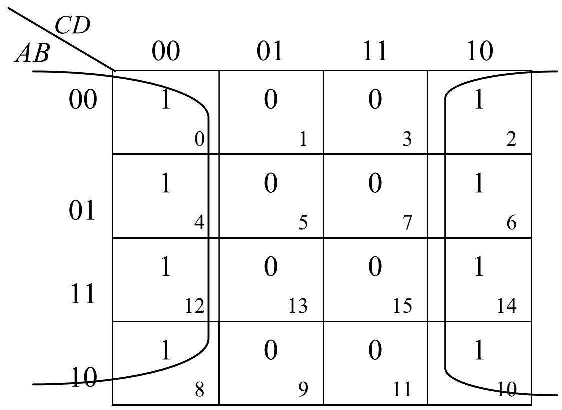
- எட்டுத்தொகையின் குறியீடு O ஆகும்.
- எடுத்துக்காட்டுகள்

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	1 $_{1}$	0 $_{3}$	0 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	0 $_{7}$	0 $_{6}$
11	1 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	1 $_{8}$	1 $_{9}$	0 $_{11}$	0 $_{10}$

படம் 5.11.1

- இங்கே ஒரு எட்டுத்தொகை $O(0,1,4,5,8,9,12,13)$ காட்டப்பட்டுள்ளது. இதில் இடமிருந்து வலம் நகர்கையில் D புரள்வதால், அதனை விலக்கலாம். மேலிருந்து கீழ்நோக்கி வரும்போது, A, B இரண்டுமே புரள்கின்றன. எனவே ஒரு எட்டுத்தொகை மூலம் மூன்று உள்ளீடுகளை விலக்க முடியும்.

- இந்த K வரைபடத்தின் தர்க்கம் $Y = \overline{C}$.



படம் 5.11.2

- படம் 5.11.2ல் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தை மடிப்பதன் மூலம் எட்டுத்தொகை $O(0,2,4,6,8,10,12,14)$ என்பதை உருவாக்கலாம். இதில் C தலைகீழாகப் புரள்கிறது. மேலிருந்து கீழே நகர்கையில் A,B இரண்டுமே புரள்கின்றன. எனவே இவை மூன்றையும் ஒதுக்கிவிட்டால், வரும் தர்க்கம் $Y = \overline{D}$ என்பதாகும்.

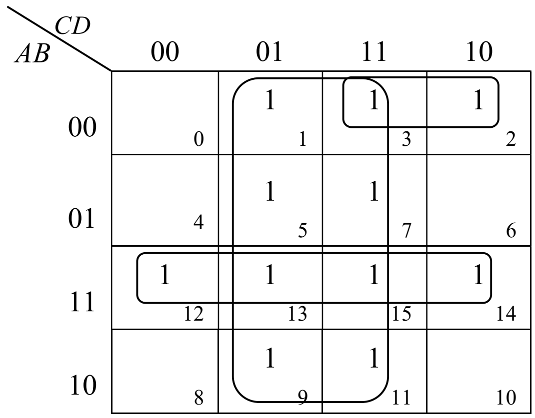
பயிற்சி 5.17

$Y = \sum(1,2,3,5,7,9,11,12,13,14,15)$ என்பதை K வரைபடம் கொண்டு சுருக்கி எழுது.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு
  $Y = \sum(1,2,3,5,7,9,11,12,13,14,15)$

இதன் K வரைபடம்



- இங்கே $O(1,3,5,7,9,11,13,15)$ எனும் ஒரு எட்டுத்தொகையையும், $Q(12,13,14,15)$ எனும் ஒரு நான்மணியையும், $P(2,3)$ இணையையும் உருவாக்கலாம்.

- இங்கே இரண்டு தொகை பிணைப்புகள் உள்ளன.

- எட்டுத்தொகையில் C, A, B ஆகிய மூன்றும் விலகுகின்றன. இதில் கிடைக்கும் தர்க்கம் D ஆகும்.

- நான்மணித் தொகையில் C, D விலகி, AB கிடைக்கிறது.

- இணை மூலம் D விலகி $\overline{A}.\overline{B}C$ என்றாகிறது.

- இவற்றை OR வாயில் கொண்டு இணைத்தல், தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தின் தர்க்க சமன்பாடு

$$\boxed{Y = D + AB + \overline{A}.\overline{B}C}$$

5.12 மிகையான தொகுதிகள் (redundant groups)

- K வரைபடங்களை பயன்படுத்தும்போது இணை, நான்மணி, எட்டுத்தொகை போன்ற தொகுதிகளை உருவாக்குகிறோம்.

- இவற்றை உருவாக்குகையில் மிகையான தொகுதிகள் (redundant groups) இல்லாதவாறு கவனம் செல்லுதல் அவசியம்.
- மிகையான தொகுதிகள் இருந்தால் தேவைக்கு அதிகமான தர்க்கங்களை பெறும் அபாயம் உள்ளது. இதனால் தர்க்கச் சுற்றும் தேவையின்றி விரிவடைந்துவிடும். எனவே மிகைப்படுத்துதல் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு

- $Y = \sum(1,5,6,7)$ எனும் கோர்வைக்கு K வரைபடம் இடலாம்.

A \ BC	00	01	11	10
00	0 ($_0$)	1 ($_1$)	0 ($_3$)	0 ($_2$)
1	0 ($_4$)	1 ($_5$)	1 ($_7$)	1 ($_6$)

படம் 5.12.1

- $P_1(1,5)$ மற்றும் $P_2(5,7)$ எனும் இரண்டு இணைகளை உருவாக்கியுள்ளோம். இதன் மூலம் கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$Y = \overline{B}C + AB$$ என்பது

- m_5 மற்றும் m_7 இரண்டும் அடுத்தடுத்து உள்ளதால், இவற்றை ஒரு இணையாக $P_3(5,7)$ என ஆக்கினால், வரும் விடை

$$Y = \overline{B}C + AB + AC$$

- ஆனால், $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ என்பதை ஏற்கனவே நிறுவியுள்ளோம். இதன்படி மேலே உள்ள சமன்பாட்டை சுருக்கி

$$Y = AB + \overline{B}C$$ என எழுத முடியும்.

- எனவே $Y = \overline{B}C + AB + AB$ என்பது சுருக்கமான வடிவம் அல்ல என்பது தெளிவாகிறது.

- முழுமை அடைந்த இரண்டு இணைகளை மீண்டும் மிகையாகப் பிணைப்பதால் ஏற்படும் அதிகப்படி தர்க்கம் இது. எனவே, மிகைப்படுத்துதல் கூடாது. எனவே முழுமையடைந்த தொகுதிகளை மீண்டும் பிணைத்து மிகையான தொகுதிகள் உருவாக்கக் கூடாது.

பயிற்சி 5.18

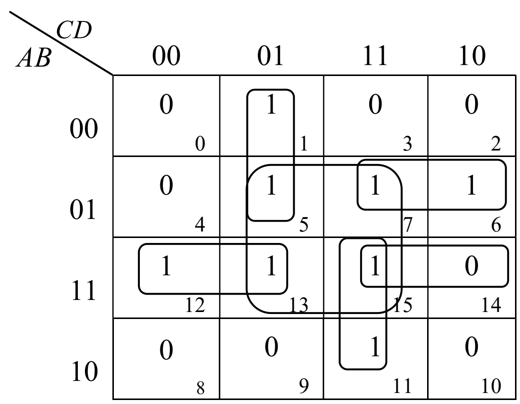
$Y = \sum(1,5,6,7,11,12,13,15)$ எனும் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி K வரைபடத்தில் தோன்றும் மிகையான தொகுதியை ஏன் விலக்க வேண்டும் என்று விவரி.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள கேர்வை

  $Y = \sum(1,5,6,7,11,12,13,15)$ ஆகும்.

- இதன் K வரைபடம்



- முடிந்தவரை பெரிய தொகுதியை உருவாக்க வேண்டும். $Q(5,7,13,15)$ என்பதே இங்கு நமக்குக் கிடைக்கும் பெரிய தொகுதி.

- இந்த நான்மணியின் அருகே நான்கு ‘1’கள் வெவ்வேறு திசைகளில் இருப்பதால், இவற்றை முறையே $P_1(1,5), P_2(6,7), P_3(12,13), P_4(11,15)$ என தொகுத்து நான்கு இணைகளை உருவாக்கலாம்.

- இந்த நான்மணி மற்றும் நான்கு இணைகள் மூலம் பெறும் சமன்பாடு $Y = BD + \overline{A}.\overline{C}.D + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ACD$

- ஆனால், முழுமையடைந்த நான்கு இணைகளைக் கொண்டு புதிய ஒரு தொகுதியை (இங்கே, நான்மணி) உருவாக்கினால் அது மிகைப்படுத்துதல் என்றாகும். மிகைப்படுத்துவதால், அதிக வாயில் தேவையாகிறது. இதனால் டிஜிட்டல் சுற்று பெரிதாகிறது.

- மிகைப்படுத்துதல் கூடாது என்பதால், நாம் ஏற்கனவே தொகுத்த நான்மணியை நீக்கிவிடலாம்.

- அவ்வாறு நீக்கியபின் நாம் பெறும் சமன்பாடு $Y = \overline{A}.\overline{C}.D + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ACD$

- இதன் மூலம் ஒரு *AND* வாயிலும் ஒரு *OR* வாயிலும் குறைகின்றன.

- எனவே $Y = \overline{A}.\overline{C}.D + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ACD$ என்பதே சரி. இதனை மேலும் சரிபார்க்க இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் மெய்ப்பட்டியல் இட்டு விடை காணலாம். *BD* எனும் மிகையான தர்க்கம் விலக்கப்படுவதால், மெய்ப்பட்டியல் மதிப்புகள் மாறுவதில்லை என்பதை கண்கூடாகப் பார்க்கலாம்.

சரியான *K* வரைபடம் இதோ,

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0_{0}	1_{1}	0_{3}	0_{2}
01	0_{4}	1_{5}	1_{7}	1_{6}
11	1_{12}	1_{13}	1_{15}	0_{14}
10	0_{8}	0_{9}	1_{11}	0_{10}

5.13 பொருட்படுத்தாத நிலைகள் - Don't care conditions

- K வரைபடங்களில் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு முக்கிய கோட்பாடு 'பொருட்படுத்தாத நிலைகள்' (Don't care conditions) என்பது.
- ஒருசில K வரைபடங்களில் மட்டுமே இந்த நிலைகள் காணப்படும். இது அந்த வரைபடம் குறிக்கும் தர்க்க சுற்றின் இயல்பை பொருத்தது.
- K வரைபடத்தில் இந்த நிலைகளை 'X' குறியீடு சுட்டிக்காட்டும்.
- சமன்பாட்டில், இந்த நிலைகளை 'd' சுட்டும். Don't care conditions என்பதில் உள்ள முதல் எழுத்தை இது உணர்த்துகிறது.
- சிறுமக் கூறுகளை (minterm) பயன்படுத்தும் K வரைபடங்களில் $X=1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம். பெருமக்கூறு (maxterm) பயன்படும் வரைபடங்களில் $X=0$. X என்பதை பொருட்படுத்தாமல், அதற்கு எந்த ஒரு மதிப்பையும் வழங்காமலும் விட்டுவிடலாம்.
- இணை, நான்மணி அல்லது எட்டுத்தொகை உருவாக்க, $X=1$ (அல்லது 0) என அதற்கு மதிப்பு வழங்கி சமன்பாட்டை சுருக்கலாம்.
- தேவைக்கு ஏற்ப Xக்கு மதிப்பு தரலாம், அல்லது விட்டுவிடலாம்.
- அதாவது, தர்க்கச் சுற்றுகள் இந்த Xகளை பொருட்படுத்தாது. எனவே நம் தேவைக்கேற்ப இவற்றிற்கு மதிப்பு தரமுடிகிறது.
- அதனால்தான் இவை don't care என அழைக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1_{0}	1_{1}	X_{3}	1_{2}
1	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}

- மேலே தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தில் உள்ள X நிலைக்கு 1 மதிப்பை அளித்தால், ஒரு நான்மணியை (QUAD) உருவாக்க இயலும்.
- $X=1$ எனும்போது $Q(0,1,2,3)$ உருவாகிறது.
- இதனால் பெறப்படும் சமன்பாடு

$$Y = A$$

- Xக்கு ஒரு வேளை மதிப்பளிக்கவில்லை எனில், நமக்கு $Y = A\overline{B} + A\overline{C}$ எனும் சமன்பாடு கிடைத்திருக்கும். இதில் இரண்டு AND வாயில்களும், ஒரு OR வாயிலும், இரண்டு NOT வாயில்களும் உள்ளன. $X=1$ எனும்போது இவை எதுவும் தேவைப்படாது.
- இவ்வாறு, தேவையான இடங்களில் சமன்பாட்டை சுருக்கி எழுத, X எனப்படும் பொருட்படுத்தாத நிலைகள் உதவுகின்றன.

பயிற்சி 5.19

$Y = F(A,B,C,D) = \sum(1,3,7,11,15) + \sum_d(0,2,5,8)$ எனும் சமன்பாட்டை K வரைபடம் கொண்டு சுருக்கி எழுது.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$\sum(1,3,7,11,15) + \sum_d(0,2,5,8)$

- இதன் K வரைபடம் கீழே உள்ளது.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	X $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	X $_{2}$
01	0 $_{4}$	X $_{5}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$
11	0 $_{12}$	$_{13}$	1 $_{15}$	0 $_{14}$
10	X $_{8}$	0 $_{9}$	1 $_{11}$	0 $_{10}$

- இங்கே $m_1, m_3, m_7, m_{11}, m_{15} = 1$
  $$d_{0,} d_{2,} d_{5,} d_8 = X$$
  $m_4, m_6, m_9, m_{10}, m_{12}, m_{13}, m_{14} = 0$
- இங்கு மூன்று நான்மணிகளை தொகுக்கும் சாத்தியம் உள்ளதைக் காணலாம்.
- $Q_1(3,7,15,11)$ ஏற்கனவே உள்ளது. இது தரும் தர்க்கம் CD.
- $d_0 = d_2 = X = 1$ எனும்போது $Q_2(0,1,2,3)$ என்பதை உருவாக்கலாம். இது $\overline{A}.\overline{B}$ எனும் விடையை தருகிறது.
- அதேபோல $d_5 = X = 1$ எனக் கொண்டால், $Q_3(1,3,5,7)$ நான்மணி உருவாகும். இதன்மூலம் B, C இரண்டையும் விலக்கி, நாம் பெறும் தர்க்கம் $\overline{A}D$.
- இங்கே $d_8 = X$ என்பதற்கு மதிப்பு எதுவும் வழங்காமல் விடப்பட்டுள்ளது. இதனை எதனோடும் தொகுக்க முடியாது என்பதால், இது தனியே விடப்பட்டது.
- பிற X களுக்கு 1 மதிப்பு வழக்கி, நான்மணிகள் மூலம் நாம் பெறும் சுருக்கமான சமன்பாடு $Y = CD + \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}D$.

பயிற்சி 5.20

$Y = F(A,B,C,D) = \sum(2,3) + \sum_d (10,11,14,15)$ என்பதை K வரைபடம் மூலம் சுருக்கி எழுது. மிகைப்படுத்தப்படாத சமன்பாட்டை பெறுவது எவ்வாறு என விவரி.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு
  $Y = \sum(2,3) + \sum_d (10,11,14,15)$

- எனவே $m_2 = m_3 = 1$

  $m_{10} = m_{11} = m_{14} = m_{15} = X$

  $m_0, m_1, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{12}, m_{13} = 0$

- இதன் K வரைபடம்

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0 ($_0$)	0 ($_1$)	1 ($_3$)	1 ($_2$)
01	0 ($_4$)	0 ($_5$)	0 ($_7$)	0 ($_6$)
11	0 ($_{12}$)	0 ($_{13}$)	X ($_{15}$)	X ($_{14}$)
10	0 ($_8$)	0 ($_9$)	X ($_{11}$)	X ($_{10}$)

- $m_{10} = m_{11} = X = 1$ எனக் கொள்வதால், $Q = (2,3,10,11)$ எனும் ஒரு நான்மணியை உருவாக்கலாம். இதன் மூலம் A மற்றும் D ஒதுக்கப்படுகிறது.

- $Q(2,3,10,11)$ மூலம் நாம் பெறும் தர்க்கம் $\overline{B}C$ ஆகும்.

- m_{14}, m_{15} ஆகிய பொருட்படுத்தாக நிலைகளுக்கு இங்கே மதிப்பு அளிக்காமல் விட்டுவிட்டோம்.

- இவற்றிக்கு 1 மதிப்பு அளித்து மேலும் ஒரு நான்மணியை உருவாக்குதல் கூடாது. ஒரு $Q = (10,11,14,15)$ தொகுப்பில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் X என இருந்தால், அது சமன்பாட்டை மிகைப்படுத்தும். இது தேவையற்றது.

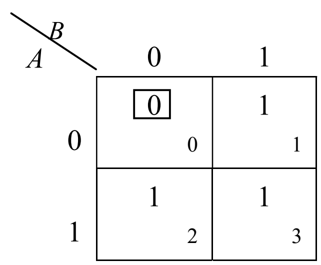
- டிஜிட்டல் சுற்றுகளின் சமன்பாட்டை சுருக்கமாக எழுதுவது முக்கியம்

- எனவே, தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தின் சமன்பாடு $Y = \overline{B}C$ ஆகும்.

5.14 பெருமக்கூறுகள் கொண்டு சுருக்குதல்

- கூட்டலை பெருக்குதல் (POS) முறையில் K வரைபடத்தை பயன்படுத்தி, சமன்பாடுகளை சுருக்கமாக எழுதலாம்.
- '0'க்களை இணை, நான்மணி, எட்டுத்தொகை என தொகுக்க வேண்டும்.
- மடித்தல் முறையை இங்கேயும் பயன்படுத்தலாம்.
- தேவையான இடங்களில், $X=0$ என்று கருதிக் கொள்ளலாம்.
- வரும் விடையை கூட்டலை பெருக்கல் வடிவில் தரவேண்டும்.

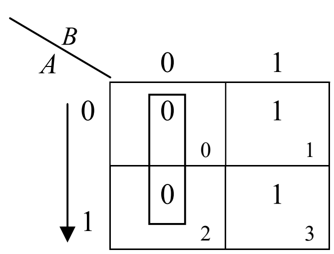
எடுத்துக்காட்டு 1



படம் 5.14.1

- படம் 5.14.1ல் தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தில் தனியாக '0' ஒன்று உள்ளது.
- பெருமக்கூறு முறையில், இதன் சமன்பாடு $Y=A+B$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2



படம் 5.14.2

- படம் 5.14.2ல் உள்ள வரைபடத்தில் காணும் இரண்டு '0'க்களையும் ஒரு இணை $P(0,2)$ என ஆக்கலாம்.
- இந்த இணையின் மூலம் A புரள்வதால், அதை விட்டுவிட்டால், நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு.

$$\boxed{Y = B}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

A \ BC	00	01	11	10
0	1 0	1 1	1 3	1 2
1	0 4	0 5	0 7	0 6

படம் 5.14.3

- படம் 5.14.3ல் உள்ள K வரைபடத்தில் ஒரு நான்மணி $Q(4,5,6,7)$ உள்ளது.
- இதன் மூலம் B,C கைவிடப்பட்டு, நாம் பெறும் சமன்பாடு $Y = \overline{A}$ என்பது.
- பெருமக்கூறுகளை நாம் இங்கு பயன்படுத்துவதால், நான்மணி உள்ள வரியில் இருக்கும் $A=1$ என்பதை $\overline{A}$ என சமன்பாட்டில் எழுதவேண்டும்.

பயிற்சி 5.21

$Y = F(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$ என்பதை பெருமக் கூறுகள் கொண்டு சுருக்கி வரைக. K வரைபட முறையை பயன்படுத்து.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடு : $Y = \sum(0,1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,14)$
- இதில் உள்ள சிறுமக் கூறுகள் : $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_6, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{14}$
- இதில் உள்ள பெருமக் கூறுகள் : m_5, m_7, m_{13}, m_{15}

- இதன் K வரைபடம்

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
01	1 $_{4}$	0 $_{5}$	0 $_{7}$	0 $_{6}$
11	1 $_{12}$	0 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	1 $_{8}$	1 $_{9}$	1 $_{11}$	1 $_{16}$

- இங்கே $Q(5,7,13,15)$ எனும் நான்மணியை உருவாக்கலாம்.
- நான்மணி மூலம் A மற்றும் D புரள்வதை காண்கிறோம். எனவே அவற்றை விலக்கலாம்.
- $D(=1)$ மற்றும் $B(=1)$ புரளாமல் உள்ளன.
- இங்கே பெருமக் கூறுகளைப் பயன்படுத்துவதால், இவற்றை $\overline{D}, \overline{B}$ என எழுத வேண்டும்.
- இதன் மூலம் கிடைக்கும் சமன்பாடு $Y = \overline{B} + \overline{D}$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.22

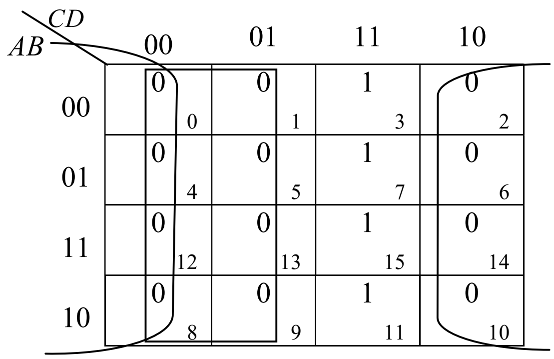
$AB \backslash CD$				
	0	0	1	0
	0	0	1	0
	0	0	1	0
	0	0	1	0

தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தின் சமன்பாட்டை பெருமக்கூறுகள் கொண்டு எழுதுக.

விடை

- தரப்பட்டுள்ள K வரைபடத்தில் இரண்டு எட்டுத்தொகைகளை கட்டமைக்கலாம்.

- அவை $Q_1(0,1,4,5,8,9,12,13)$ மற்றும் $Q_2(0,2,4,6,8,10,12,14)$



- இரண்டு எட்டுத்தொகைகளும் பிணைந்துள்ளன. மேலும். இரண்டாவது எட்டுத்தொகை வரைபடத்தை மடித்து உருவாக்கப்பட்டது.

- முதல் எட்டுத்தொகை மூலம் A,B,D விலகி விடும். $C(=0)$ என்பது தங்கும். பெருமக் கூறுகளை பயன்படுத்துவதால், இங்கே Cயை புரட்டி எழுதக் கூடாது.

- இரண்டாவது எட்டுத்தொகை A,B,C விலகி $D(=0)$ மதிப்பு மட்டுமே கிடைக்கிறது.

- எனவே POS முறையில் இவற்றை பெருக்கினால், இதற்கான சமன்பாடு $Y = CD$ கிடைக்கும்.

பயிற்சி 5.23

$Y = F(A,B,C) = \Pi(2,3,4,5)$ என்பதை பெருமக்கூறுகள் கொண்டு K வரைபட உதவியுடன் சுருக்கி எழுது. மேலும் சிறுமக் கூறுகள் கொண்டு இதை சுருக்கினாலும் அதே விடை கிடைக்கும் என்று நிறுவுக.

விடை

(i) பெருமக்கூறு முறை :

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1_{0}	1_{1}	0_{3}	0_{2}
1	0_{4}	0_{5}	1_{7}	0_{6}

- பெருமக்கூறு முறையில் '0'க்களை தொகுக்க வேண்டும்.
- இங்கே $P_1(2,3)$ மற்றும் $P_2(4,5)$ எனும் இரண்டு இணைகளை கட்டமைக்க முடிகிறது.
- $P_1(2,3)$ மூலம் C நிராகரிக்கப்படும். இந்த இணை தரும் கூட்டல் மதிப்பு $(A+\overline{B})$ ஆகும். இங்கே B என்பது $B=1$ நிலையில் இருப்பதால், பெருமக் கூறு முறைப்படி இதனை $\overline{B}$ என தலைகீழாக புரட்டியுள்ளோம். A இங்கே $A=0$ நிலையில் இருப்பதால், அது புரட்டப்படவில்லை.
- $P_2(4,5)$ என்பதிலிருந்து நாம் பெறும் கூட்டல் தர்க்கம் $(\overline{A}+B)$. இங்கே A புரட்டப்பட்டுள்ளது, B தலைகீழாக புரட்டப்படவில்லை.
- இவற்றை AND மூலம் பெருக்கினால் தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் சுருக்கம் கிடைக்கும். வரும் விடை

$$Y=(A+\overline{B}).(\overline{A}+B) \qquad \ldots\ldots (1)$$

(ii) சிறுமக்கூறு முறை

- இதற்கு K வரைபடத்தில் உள்ள '1'களை தொகுக்க வேண்டும்.

- K வரைபடம் இதோ

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	1 0	1 1	0 3	0 2
1	0 4	0 5	1 7	1 6

- இரண்டு இணைகள் : $P_1(0,1)$ மற்றும் $P_2(6,7)$ உள்ளன.
- $P_1(0,1)$ மூலம் C உள்ளீடு நீங்கி, நாம் பெறும் பெருக்கல் $\overline{A}.\overline{B}$ ஆகும்.
- $P_2(6,7)$ மூலம் AB கிடைப்பது AB.
- இவற்றை கூட்டினால் (OR), வரும் சமன்பாடு

$$Y = \overline{A}.\overline{B} + AB \qquad \text{-------(2)}$$

- பெருமக்கூறு முறையில் பெறும் சமன்பாடும் சிறுமக்கூறு முறையில் பெறுவதும் சமம் என்பதை நிறுவலாம்.
- பெருமக்கூறு முறையில் கிடைத்த சமன்பாட்டை பூலியன் விதிகள் கொண்டு சுருக்கலாம்.

$$\begin{aligned} Y &= (A+\overline{B}).(\overline{A}+B) \\ &= A\overline{A} + AB + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}B \qquad (A\overline{A}=0,\ \ B\overline{B}=0) \\ &= AB + \overline{A}.\overline{B} \end{aligned}$$

- இதுவே நாம் சிறுமக்கூறு முறையில் பெற்ற (2) சமன்பாடு
- எனவே, தரப்பட்ட மெய்ப்பட்டியல் அல்லது சமன்பாட்டை K வரைபடம் கொண்டு பெருமக்கூறு முறையில் சுருக்கினாலும், சிறுமக்கூறு முறையில் சுருக்கினாலும் கிடைக்கும் விடைகள் சமமாக இருக்கும்.

5.15 வரைபட முறையின் நேர்த்தி

- தரப்பட்ட தர்க்க சமன்பாட்டை சுருக்க பல வழிமுறைகள் உள்ளன.
- அவற்றுள் முக்கியமானவை (i) பூலியன் விதிகள் கொண்டு படிப்படியாய் சுருக்குதல் (ii) K வரைபட முறை, (iii) அட்டவணை முறை
- இந்த முறைகளில் மிகவும் நேர்த்தியனாது K வரைபட முறை. பொதுவாக, இது வேகமானதும் கூட.
- ஒரு எடுத்துக்காட்டு மூலம் இதனை புரிந்து கொள்ள முடியும்.
- $Y = \sum(1,3,4,5,6,7)$ எனும் தர்க்கத்தை சுருக்கப் பார்க்கலாம்.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0 (0)	1 (1)	1 (3)	0 (2)
1	1 (4)	1 (5)	1 (7)	1 (6)

- இதில் $P(0,2)$ எனும் இணையை உருவாக்கினால், நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு $Y = A + C$ ஆகும்.
- மிக எளிதாகவும் நேர்த்தியுடனும் K வரைபடம் சமன்பாடுகளை சுருக்கிகத் தர உதவுகிறது.
- இந்த சமன்பாட்டை படிப்படியாகவோ. அட்டவணை முறையிலோ சுருக்கப் பார்த்தால், இவ்வளவு வேகமாகச் செய்ய இயலாது.
- K வரைபட உதவியால் நேர்த்தியுடன் டிஜிட்டல் சுற்றுகளை வடிவமைக்க முடியும்.

5.16. K வரைபடத்தின் பயன்பாடு

- மெய்ப்பட்டியலிலிருந்து சமன்பாடுகளை தருவிக்கலாம்.
- தரப்பட்ட சமன்பாட்டை சுருக்கி எழுதலாம்.
- கணினி நிரல் எழுத உதவுகிறது.
- வேகமானது, எளிமையானது.
- இவ்வாறு சுருக்கமான சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி தர்க்க சுற்றுகளை வடிவமைப்பதால், சுற்றுகள் எடுத்துக் கொள்ளும் இடம், அதற்கான செலவு, தேவைப்படும் மின்னாற்றல் குறையும். நேரம் மிச்சமாகும்.
- தொழில்நுட்பம் வேகமாக வளரும் இக்காலத்தில், மின்னணு பொருட்களின் அளவு சிறிதாகிக் கொண்டே வருகிறது. இவற்றின் வேகம் கூடிக் கொண்டும் இருக்கிறது. அதற்கேற்ற நிரல்களை வடிவமைக்கவும். மின்னணு சுற்றுகளை உருவாக்குவதிலும் K வரைபடத்தின் பங்கு இன்றியமையாதது.

வினாக்கள்

குறுவினாக்கள்

1. கார்ணா வரைபடம் என்றால் என்ன? (UNOM)

2. சதுர நான்மணி கொண்ட K வரைபடத்தை வரைக.

3. மின்னணு சுற்றுகள் சுருக்கமாக இருக்க வேண்டியதற்கு இரண்டு காரணங்கள் எழுதுக.

4. ஒரு தர்க்க சமன்பாட்டின் உள்ளீடுகள் எண்ணிக்கை 'n' என்றால், அதன் K வரைபடத்தில் உள்ள கட்டங்கள் எத்தனை?

சிறுவினாக்கள்

1. $Y = \sum(2,3,12,13,14,15) = AB + \overline{A}.\overline{B}.C$ என்பதை K வரைபடம் மூலம் நிறுவுக.

2. பொருட்படுத்தாத நிலைகள் (Don't care conditions) என்றால் என்ன? அவற்றை பயன்படுத்தி தர்க்க சமன்பாட்டை எவ்வாறு சுருக்க முடியும் என்பதை விளக்குக.

3. கார்ணா வரைபடத்தின் முக்கிய பண்புகளை விவரி.

4. ஒரு எடுத்துக்காட்டு மூலம் மிகையான தொகுதி என்றால் என்ன? அதை ஏன் உருவாக்கக் கூடாது என்பதை விளக்குக.

5. தொகுதிப் பிணைப்புகளை உருவாக்குவதன் பலன் என்ன என்பதை எடுத்துக்காட்டு மூலம் விவரிக்கவும்.

6. K வரைபடத்தின் சிறுமக்கூறுகள் கொண்டு சுருக்கினாலும், பெருமக்கூறுகள் கொண்டு சுருக்கினாலும் விடை சமமாக இருக்கும் என்பதை ஏதேனும் ஒரு எடுத்துக்காட்டு கொண்டு நிறுவுக.

7. எட்டுத்தொகையை பயன்படுத்தி சமன்பாட்டை சுருக்குவது எப்படி என எடுத்துக்காட்டுடன் விவரி.

நெடுவினாக்கள்

1. $Y = F(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,4,5,10,11,14,15)$ எனும் சமன்பாடு $\overline{A}.\overline{C} + AC + \overline{A}.\overline{B}.\overline{D}$ என்பதற்குச் சமம் என்பதை K வரைபடம் கொண்டு நிறுவுக. இதில் வரைபடத்தை மடித்தல் எவ்வாறு பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்பதை எழுதுக. (UNOM)

2. கார்ணா வரைபடத்தை பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவையை சுருக்கி, அதற்கான $AND-OR$ தர்க்கச் சுற்றை வரைக. (UNOM)

$$Y = F(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,3,6,7,13,15)$$

3. பின்வரும் சமன்பாடுகளை கார்ணா வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி சுருக்குக. (UNOM)

$$a) Y = A\overline{B}C + \overline{AB}C + \overline{A}BC + A\overline{BC} + A\overline{BC} + \overline{ABC}$$

$$b) Y = \overline{A}B\overline{C}.\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}.\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}.\overline{C}D + \overline{A}.\overline{B}C\overline{D}$$

4. $F(A,B,C,D) = \sum(1,3,7,11,15) + \sum_d(0,25)$ என்ற சமன்பாட்டை K வரைபடத்தின் உதவியுடன் சுருக்குக. சுருக்கப்பட்ட கோவைக்கான சுற்றுப்படத்தை வரைக. (UNOM)

கற்றல் வளங்கள்

1. Digital Electronics & Microprocessor 8085, V. Vijayendran, S. Viswanathan (Printers & Publishers) Pvt. Ltd., 2019.

2. Digital Fundamentals, V.Vijayendran, S. Viswanathan (Printers & Publishers) Pvt. Ltd., 2019.

3. A textbook of Digital Electronics, R.S.Sedha, S.Chand and Company Limited.

4. கணினி அறிவியல், வகுப்பு 11, தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல் பணிகள் கழகம், 2018

5. Introduction to Integrated Electronics : Digital and Analog, V.Vijayendran, S. Viswanathan (Printers & Publishers) Pvt. Ltd., 2019.

6. Digital Electronics, Principles, Devices and Applications, Anil.K.Maini, John Wiley & Sons, 2007.

7. Virtual Labs, IIT Kharagpur - www.vlab.cu.in

8. Virtual Amrita Laboratories - www.vlab.amrita.edu

9. Centre for Development of Advanced Computing (CDAC) - www.cdac.in

10. ASCII – www.ascii-code.com

11. Tamil Unicode – www.tamilvu.org

கலைச்சொற்கள்
Glossary

Algebra	இயற்கணிதம்
AND	அனைத்தும்
Associative law	தொடர் விதி
Bubbled	வட்டமிடப்பட்ட
Carry	செல் எண்
Commutative law	இடமாற்ற விதி
Constant	மாறிலி
Distributive law	பகிர்வு விதி
Don't care	பொருட்படுத்தாத
Duality principle	இரட்டை நிலை கோட்பாடு
Electronic circuit	மின்னணு சுற்று
End-around carry	கடைமிகுதி செல்எண்
Folding	மடித்தல்
Gate	வாயில்
HIGH	மெய்
Idempotent	உள்ளீடும் வெளியீடும் சமமானது
Input	உள்ளீடு
Involution	தனக்கான மாற்றி
Logic	தர்க்கம்
LOW	பொய்
Maxterm	பெருமக்கூறு
Minterm	சிறுமக்கூறு
NOT	தலைகீழ் மாற்றி / புரட்டி / தலைகீழி
Octet	எட்டுத்தொகை
OR	அல்லது

Output	வெளியீடு
Pair	இணை
Product of sum	கூட்டலை பெருக்குதல்
Quad	நான்மணி
Redundant	மிகையான
Rolling	சுருட்டுதல்
Sum of product	பெருக்கலை கூட்டுதல்
Theorem	தேற்றம்
Truth table	மெய்பட்டியல் / மெய் அட்டவணை
Universal building block	முழுமையான கட்டமைப்புத் தொகுதி
Universal gate	பொதுமை வாயில் / முழுமையான கட்டமைப்பு வாயில்
Variable	மாறி

No Objection Certificate

(i) I, *Sudha Seshayyan (publishing editor)* represent and warrant that I am the sole owner of all copyright, trademark, and other intellectual property and proprietary rights in relation to the book/material, mentioned below.

(ii) I, *Sudha Seshayyan (publishing editor)* undertake that the Book/Material is not subject to any contract or arrangement which would conflict with my permission herein.

(iii) This is to certify that the undersigned hereby gives permission to UGC and also authorizes UGC to get it translated or published and uploaded on e-kumbh portal

1. Iyanguthalam – or arimugam (Computer Science)
2. Karkum karuvi iyal (Machine learning)
3. Uyir vedhiyiyal or arimugam (Biochemistry)
4. Adhinunniyal matrum adhi thozhil Nutpam (Nano technology)
5. Adippadai minnanuviyal (Basic electronics)
6. Digital electronics
7. Paayma iyakkaviyal (Fluid mechanics)
8. Poriyiyal kanitham (Engineering mathematics)
9. Poriyalargalukkana vedhiyiyal (Chemistry for engineers)
10. Kalvi melanmai (Educational management)

(iv) UGC will have the full right to publish the book/text and is authorized to do any required modifications, republication, or any other assistance related to the text if required.

(v) No legal action will be taken by the author in this regard.

19/7/23

Signature
Publishing Editor

Date 19th July 2023

Place Chennai